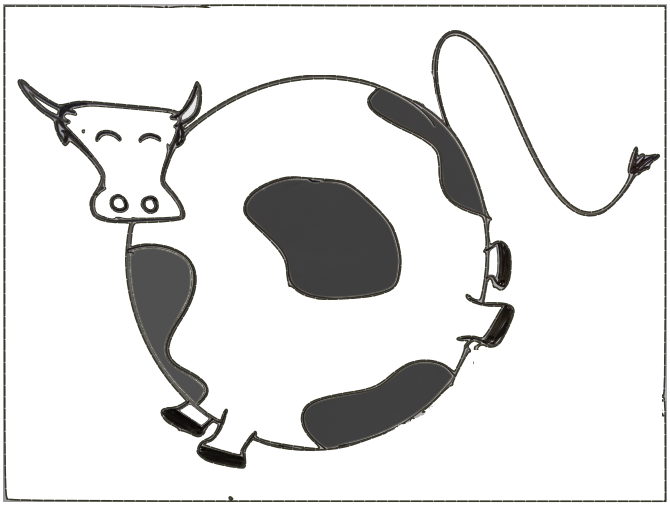
LUIS DINIS

FÍSICA APLICADA A LA BIOLOGÍA



VERSIÓN 1.2 - 24 DE ENERO DE 2026
Pincha aquí para descargar la última versión

Índice general

Prefacio y Licencia 7

1 Repaso de Dinámica 9

1.1 ¿Qué trata este capítulo? 9
1.2 Dinámica 9
1.3 Trabajo 11
1.4 Energía 15
1.5 Energía potencial gravitatoria 18
1.6 Conservación de la energía mecánica 19
1.7 Fuerzas no conservativas. Movimiento con fricción 23
1.8 Torque o momento de una fuerza. 25

2 Fluidos 29

2.1 ¿Qué son los fluidos y para qué los estudiamos? 29
2.2 Propiedades de los fluidos 29
2.3 Líquidos y gases 30
2.4 Presión en fluidos 30
2.5 Variación de la presión con la profundidad 31
2.6 Presión absoluta y presión manométrica 32
2.7 Medida de la presión manométrica. Manómetro de tubo en U 32
2.8 Medida de la presión atmosférica. Experimento de Torricelli 34
2.9 Principio de Arquímedes. 34

2.10 *Dinámica de fluidos* 38
2.11 *Flujo de masa y caudal* 38
2.12 *Conservación de la masa o el caudal* 39
2.13 *Ecuación de Bernoulli* 39
2.14 *Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli* 41
2.15 *Fluidos reales* 46
2.16 *Propiedades de la superficie. Tensión superficial y capilaridad* 53

3 TERMODINÁMICA 59
3.1 *¿Para qué la termodinámica?* 59
3.2 *Temperatura. Equilibrio térmico.* 59
3.3 *Gas ideal. Temperatura absoluta.* 60
3.4 *Teoría cinética de los gases. Interpretación microscópica de la T* 62
3.5 *Distribución de velocidades de Maxwell* 64
3.6 *Visión microscópica de algunos fenómenos de relevancia biológica* 64
3.7 *Calor, ¿qué es?* 67
3.8 *Transmisión de Calor* 68
3.9 *Calorimetría* 72
3.10 *Las leyes de la Termodinámica* 75
3.11 *Fluctuaciones* 100

4 ELECTRICIDAD 105
4.1 *¿De qué trata el capítulo?* 105
4.2 *Carga eléctrica. Conservación de la carga* 105
4.3 *Fuerza entre cargas. Ley de Coulomb* 106
4.4 *Ley de Coulomb vectorial* 107
4.5 *Campo eléctrico* 110
4.6 *Potencial eléctrico* 115
4.7 *Capacidad de la membrana biológica* 127
4.8 *Corriente eléctrica* 128
4.9 *Transmisión del impulso nervioso* 137

5 OSCILACIONES Y ONDAS 149

5.1 *¿Por qué nos interesan las ondas?* 149

5.2 *Movimiento oscilatorio armónico simple* 149

5.3 *Movimiento ondulatorio. Descripción* 152

5.4 *Energía, potencia e intensidad de una onda* 154

5.5 *Volumen e intensidad en ondas sonoras* 155

5.6 *Intensidad de la onda y la superficie de detección* 157

5.7 *Fenómenos ondulatorios típicos* 158

6 *Bibliografía* 165

Prefacio y Licencia

Este libro se basa en mis apuntes de clase del curso de Física Aplicada a la Biología de la Universidad Complutense de Madrid, de la que soy profesor titular. Son apuntes elaborados a partir de multitud de fuentes (que cito cuando es posible) y con la inestimable guía para la elección de algunos temas y ejemplos del profesor J.M.R. Parrondo que me pasó sus apuntes hace ya algún tiempo y al que estoy muy agradecido por su generosidad. También quiero agradecer a los profesores Juan José Mazo y Elsa Mohino su lectura atenta, sus comentarios y la corrección de algunos errores. Los que quedan todavía son de mi entera responsabilidad.

La intención de este documento no es otra que tener los apuntes en formato electrónico, de forma que se puedan ir mejorando o cambiando evitando tachones y modificaciones que finalmente plagan los apuntes reciclados de año en año. Por esta razón son eminentemente gráficos, con multitud de esquemas. El texto es intencionadamente telegráfico en ocasiones, aunque al escribir es difícil evitar la tentación de volverse formal con el lenguaje y dar muchos detalles para el lector. Han resultado un recurso inestimable como material de apoyo en la docencia online.

Esta es la (tercera) primera versión completa (versión 1.2), con los 5 temas del curso: Dinámica, Fluidos, Termodinámica, Electricidad y Ondas. La diferencia con la 1.0 es que ha sido revisada para corregir errores, añadir detalles, referencias, resultados experimentales, puntualizaciones y algunas figuras como en la ley de Kirchhoff, la óptica del ojo, la energía de enlace de A-T y G-C, el impulso nervioso o la microscopía de superresolución. Respecto de la versión 1.1, se ha añadido el rozamiento con una superficie, una pequeña sección sobre producción de entropía en procesos a T, p constantes y el concepto de rendimiento en el metabolismo humano. En algunos temas, hay algo más de contenido de lo que en un curso normal da tiempo a explicar, para poder elegir qué dejar fuera en función de las necesidades. Otros, como ondas, cubren sólo lo esencial y es posible que los amplíe en un futuro.

No me importa que se reutilice este material, simplemente recuérdese atribuir correctamente el trabajo a su autor y por supuesto no lucrarse de ello. Por ello sale a la luz bajo licencia creative commons. La licencia cubre tanto los textos como las figuras.

Este libro es completamente gratis, pero por favor no distribuyas el PDF, mejor pasa a quien esté interesado este enlace donde encontrará siempre la última versión actualizada:

http://seneca.fis.ucm.es/ldinis/ccounter/click.php?id=1

Además esto me permitirá contar las descargas. ¡Gracias!

Except where otherwise indicated, the entirety of this work ("Física aplicada a la Biología"), including the text and original figures, is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (CC BY-NC-SA 4.0). A copy of this license may be consulted at: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/.

This work also incorporates material in the public domain. Specifically, a portion of Figure 2 from Tam J, Cordier GA, Borbely JS, Sandoval Álvarez A, Lakadamyali M (2014), "Cross-Talk-Free Multi-Color STORM Imaging Using a Single Fluorophore", PLoS ONE 9(7): e101772, https://doi.org/10.1371/journal.pone.0101772, has been adapted and is used under the Creative Commons CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication, in section 5.7. Such public domain material is not subject to the terms of the aforementioned license.



1
Repaso de Dinámica

1.1 ¿Qué trata este capítulo?

En este primer capítulo repasaremos conceptos fundamentales para el resto del curso relativos al movimiento, las fuerzas, la energía y el torque. El concepto de *energía* se utiliza en todos los demás temas. Es de importancia central en física, probablemente por el principio de conservación de la energía. Nos permite, en ocasiones, decir algo de un proceso sin tener mucha más información de los detalles, por lo que puede ser interesante en multitud de situaciones. La energía desempeña un papel fundamental por ejemplo en el metabolismo, en el control de temperatura o en el movimiento de los animales. Las plantas transforman la energía del Sol en energía química en los enlaces de los azúcares. Los animales y las plantas utilizamos esa energía para multitud de procesos en todas las escalas, desde caminar, volar, las funciones fisiológicas, el transporte en las células, la duplicación del ADN, etc... La generación y consumo de energía en distintas formas por parte de los humanos tiene efectos globales en el planeta y en los ecosistemas.

La palabra energía se usa muy frecuentemente, a menudo con significado ambiguo. Pero exactamente, ¿qué es la energía? La ruta hacia la comprensión de este concepto abstracto es el trabajo mecánico y la empezaremos a recorrer en este capítulo.

1.2 Dinámica

De las 3 leyes de Newton, usaremos 2 esencialmente:

- 2ª ley de Newton: $F = ma$ o en forma vectorial $\vec{F} = m\vec{a}$. La fuerza aplicada sobre un objeto de masa m le proporciona una aceleración $a = F/m$. La fuerza aquí representa la fuerza neta o suma (vectorial) de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

$\vec{F} = m\vec{a}$

- 3ª ley de Newton: Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro B, entonces B ejercerá sobre A una fuerza de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario.

$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Segunda ley de Newton

Es importante que la segunda ley relaciona la fuerza con la aceleración, no con la velocidad. Aceleración (o fuerza) y velocidad no siempre apuntan en la misma dirección. Por ejemplo, cuando tiramos una piedra al aire, la aceleración siempre es hacia abajo (la aceleración de la gravedad), mientras que durante la subida la velocidad apunta hacia arriba, como en la figura 1.1. Otro ejemplo es durante un movimiento circular.

La segunda ley es fundamental porque a partir de las fuerzas que se aplican a un objeto permite deducir la aceleración en cada momento, y de la aceleración uno podría obtener en principio la velocidad y la posición, esto es la trayectoria del objeto[1]. Vamos a repasar los dos casos más sencillos.

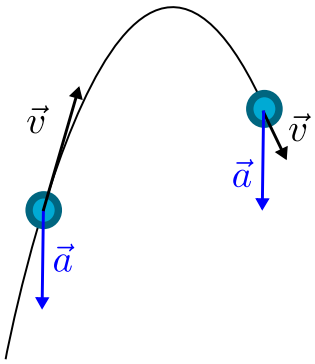


Figura 1.1: Si lanzamos una pelota al aire, la aceleración que sufre es siempre la de la gravedad (hacia abajo). La velocidad va apuntando en distintas direcciones a lo largo de la trayectoria.

[1] En general esto no es trivial, pero en principio se puede hacer, aunque sea numéricamente con un ordenador

1. Movimiento uniforme. El ejemplo más sencillo, que usaremos, se da cuando la suma de todas las fuerzas sobre el objeto es nula. De este modo, la aceleración es nula. Aceleración nula significa velocidad constante, (no necesariamente cero):

$$\text{Cuando } F_{\text{total}} = 0 \Rightarrow 0 = F_{\text{total}} = ma \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v = \text{cte.} \tag{1.1}$$

   ya que la aceleración es el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo. Para una velocidad constante, tenemos $v = \frac{x - x_0}{t}$, donde x es la posición del objeto en un tiempo t y x_0 la posición inicial (en $t = 0$), podemos encontrar la posición en función del tiempo

$$x = x_0 + vt \tag{1.2}$$

   o el espacio recorrido como $s = |x - x_0| = |v|t$.

2. Movimiento uniformemente acelerado. Es lo siguiente más sencillo y corresponde a un móvil sometido a una fuerza constante en magnitud, dirección y sentido.

$$F = \text{cte.} \Rightarrow a = \frac{F}{m} = cte. \tag{1.3}$$

   Para una aceleración constante, la aceleración mide el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo t según:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \tag{1.4}$$

donde v será la velocidad en un momento t, v_0 la velocidad inicial. Despejando, esto nos permite escribir

$$F = \text{cte.} \Rightarrow a = \frac{F}{m} = cte. \Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.5}$$

donde el último paso se demuestra integrando la velocidad, lo que está fuera del objetivo de este curso.

Igual que antes x es la posición en un instante t, x_0 la posición inicial.

Matemáticamente $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = v_0 + \int a dt = v_0 + at$ para $a = \text{cte.}$. Después, $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int v dt = x_0 + \int (v_0 + at) dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

3. Caso general. Habitualmente las fuerzas sobre un objeto son complicadas, dependiendo de la posición y/o del tiempo. En ese caso, obtener la trayectoria es difícil, aunque se puede hacer, en los casos más complejos de forma numérica con un computador. En ese caso, las ecuaciones (1.2) o (1.5) no serán válidas.

Tercera ley de Newton

El ejemplo más claro quizás de la tercera ley de Newton es la fuerza gravitatoria entre el Sol y la Tierra. El Sol atrae a la Tierra con una fuerza, según la ley de la gravitación universal que en módulo vale

$$F_{ST} = G\frac{M_S M_T}{r^2} \tag{1.6}$$

donde M_S y M_T son las masas de Sol y Tierra, r la distancia que las separa y G una constante. A su vez la fuerza que ejerce la Tierra sobre el Sol es

$$F_{TS} = G\frac{M_S M_T}{r^2} \tag{1.7}$$

exactamente la misma. La fuerza del Sol sobre la Tierra apunta de la Tierra al Sol y la que ejerce la Tierra sobre el Sol apunta del Sol a la Tierra, en la misma dirección y sentido contrario.

Igual, la Tierra ejerce una fuerza sobre tu cuerpo, pero tu cuerpo ejerce sobre la Tierra una atracción exactamente igual de intensa hacia arriba.

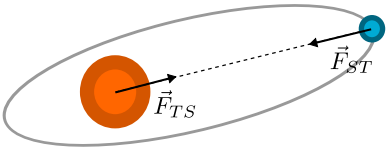


Figura 1.2: La fuerza que ejerce la Tierra sobre el Sol es igual en magnitud y dirección, pero de sentido contrario que la fuerza que ejerce el Sol sobre la Tierra. $\vec{F}_{TS} = -\vec{F}_{ST}$

1.3 *Trabajo*

Como se ha dicho, la dinámica puede llegar a ser muy compleja (además en general es vectorial). En algunos casos se puede obtener una simplificación utilizando un acercamiento basado en trabajo y energía. Empezamos por el trabajo.

El trabajo es una cantidad que se define para una fuerza que actúa sobre un cuerpo que se desplaza una distancia[2]. Distinguiremos dos casos, fuerza constante (no cambia ni módulo ni dirección ni sentido) o fuerza variable.

[2] El movimiento del cuerpo no necesariamente tiene que ser el que se produciría bajo la acción de esa fuerza.

Trabajo realizado por una fuerza constante

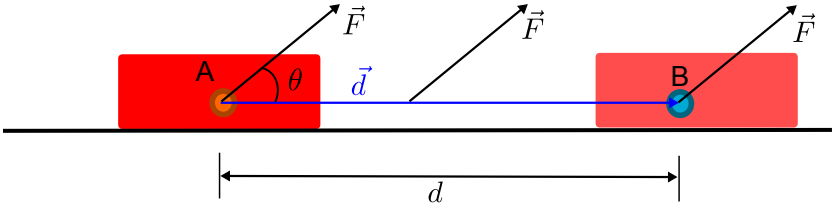


Figura 1.3: Trabajo de una fuerza constante. El vector $\vec{d}$ es el desplazamiento, va del punto inicial al final. En una trayectoria recta, $|\vec{d}| = d$ su módulo es la distancia recorrida.

El trabajo para una fuerza F constante, cuando se desplaza de un punto inicial A a otro final B, en una línea recta se define así

$$W_{AB} = Fd\cos\theta \tag{1.8}$$

donde

- F es el módulo de la fuerza,
- d es la distancia recorrida por el objeto entre los puntos A y B,
- θ es el ángulo que forman la dirección de desplazamiento del objeto y la fuerza.

También puede definirse igualmente como el producto escalar de los vectores $\vec{F}$ y $\vec{d}$, donde $\vec{d}$ es un vector que empieza en A y acaba en B:

$$W_{AB} = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta \tag{1.9}$$

Es importante darse cuenta de que con cualquiera de las definiciones, el trabajo:

- Tiene signo (por ejemplo, el coseno es negativo para ángulos entre 90º y 270º, esto es, la $\vec{F}$ tiene componente negativa en la dirección de desplazamiento).
- Si el ángulo entre $\vec{F}$ y la dirección de desplazamiento son perpendiculares $\Rightarrow W_{AB} = 0$
- Solo la componente de la fuerza en la dirección de desplazamiento hace W

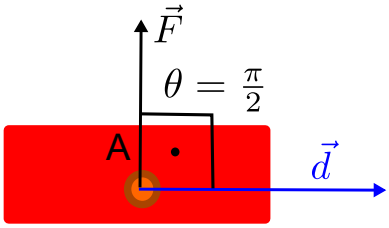


Figura 1.4: Si $\vec{F}\perp\vec{d}\Rightarrow W = 0$

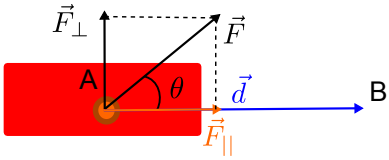


Figura 1.5: $W = Fd\cos\theta = F_{||}d$ porque $F_{||} = F\cos\theta$

Las unidades del trabajo son

$$[W] = [F][d] = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 1\,\mathrm{J} \tag{1.10}$$

Trabajo realizado por una fuerza variable en cualquier trayectoria

El trabajo para una fuerza variable, que va de un punto A a otro B matemáticamente es

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_A^B |\vec{F}|\cos\theta dr \tag{1.11}$$

esto es, hablando llanamente, dividir la trayectoria en pequeños desplazamientos rectos de pequeña distancia dr, utilizar la definición (1.8) en cada uno y sumarlos todos. Matemáticamente puede resultar un poco más difícil de calcular, pero físicamente es la misma idea.

Trabajo de A a B y de B a A

Consideremos el trabajo de una fuerza $\vec{F}$ al ir de A a B, $W_{AB} = Fd\cos\theta$. Si ahora calculamos para la misma fuerza el trabajo para ir desde B a A de vuelta W_{BA}, vemos en la figura que el desplazamiento tiene el sentido contrario. Partiendo de la definición

$$W_{BA} = Fd\cos\alpha \tag{1.12}$$

donde α es el ángulo entre la fuerza $\vec{F}$ y el nuevo desplazamiento desde B hasta A. Según la figura 1.6, la relación entre los dos ángulos es $\alpha = \pi - \theta$ de modo que $\cos\alpha = -\cos\theta$ así que

$$W_{BA} = Fd\cos\alpha = -Fd\cos\theta = -W_{AB} \tag{1.13}$$

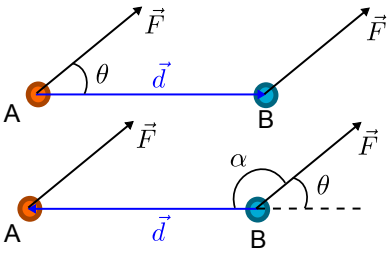


Figura 1.6: Relación entre el trabajo de una fuerza para ir de A a B con el trabajo al invertir la trayectoria

Trabajo de la fuerza contraria $-\vec{F}$

Si una fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo W^F_{AB} entre los puntos A y B, entonces la fuerza contraria $-\vec{F}$ realiza el mismo trabajo pero con el signo contrario. Del dibujo (figura 1.7) se ve que al cambiar $\vec{F}$ por $-\vec{F}$ el ángulo nuevo α sigue la misma relación que en la sección anterior $\alpha = \pi - \theta$ de modo que $\cos\alpha = -\cos\theta$ y

$$W^{-F}_{AB} = Fd\cos\alpha = -Fd\cos\theta = -W^F_{AB} \tag{1.14}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{F}$ y el desplazamiento de A a B mientras que α es el ángulo entre $-\vec{F}$ y el mismo desplazamiento.

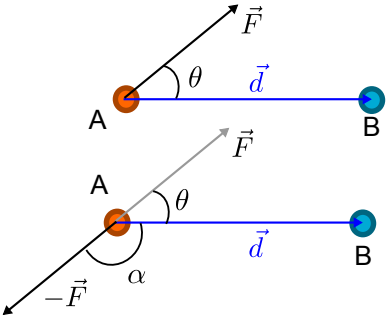


Figura 1.7: Relación entre el trabajo de una fuerza para ir de A a B con el trabajo de la fuerza contraria $-\vec{F}$ en la misma trayectoria

El círculo unidad

El círculo unidad es una herramienta útil para relacionar senos y cosenos de ángulos complementarios, suplementarios, negativos unos de otros o con otras relaciones simples. El círculo tiene radio 1, de modo que para un cierto ángulo α, teniendo en cuenta el triángulo de la figura 1.8, el lado sobre el eje horizontal (en rojo) coincide con el $\cos\alpha$ y el lado vertical (en azul) con el $\sin\alpha$. Las cantidades a la derecha del eje vertical son positivas, las cantidades a la izquierda negativas. En el vertical, las cantidades por encima del eje vertical son positivas, las que están por debajo son negativas. Los ángulos se cuentan positivos en el sentido contrario a las agujas del reloj, y negativos en sentido contrario. Veamos un ejemplo que permite relacionar el coseno de dos ángulos que suman π (180º).

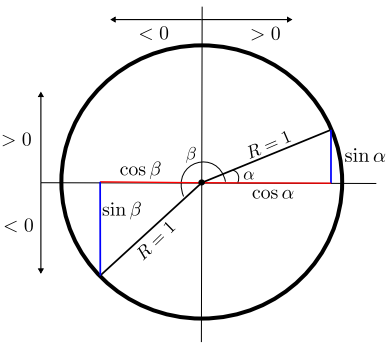


Figura 1.8: Círculo unidad. Es un círculo de radio unidad útil para relaciones trigonométricas. Las cantidades horizontales son positivas hacia la derecha del eje vertical, las cantidades verticales son positivas hacia arriba del eje horizontal. En este caso, $\cos\alpha > 0$ pero $\cos\beta < 0$ por ejemplo.

Ejemplo 1.3.1 **Coseno de $\beta = \pi - \alpha$**

¿Qué relación existe entre el $\cos\beta$ y $\cos\alpha$ cuando $\beta + \alpha = \pi$?

SOLUCIÓN

Como se ve en la figura 1.9, si $\beta + \alpha = \pi$ entonces el ángulo que falta desde β hasta completar el ángulo π es también α (en la parte izquierda de la figura). Entonces, los dos tramos marcados en rojo son iguales en tamaño. Así, el coseno de ambos ángulos vale lo mismo, salvo por el signo, ya que el $\cos\beta < 0$ en este caso. Por tanto:

$$\cos\beta = -\cos\alpha \tag{1.15}$$

Por ejemplo si $\alpha = 30° = \pi/6$ entonces como $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

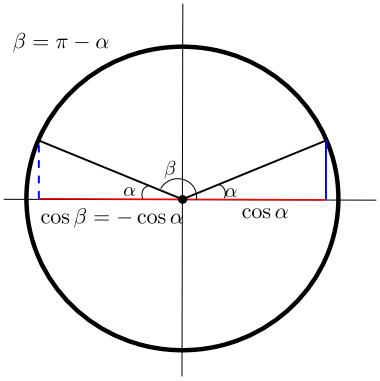


Figura 1.9

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 1.3.2 **Coseno de $\beta = \pi/2 + \alpha$**

¿Qué relación existe entre el $\cos\beta$ y alguna función trigonométrica de α cuando $\beta = \pi/2 + \alpha$?

SOLUCIÓN

Como se ve en la figura 1.10, como el ángulo en exceso de β sobre el ángulo recto es exactamente α, los tramos azules son de igual longitud. El tramo azul sobre el eje horizontal es precisamente el $\cos\beta$. $\cos\beta < 0$ mientras que $\sin\alpha$ es positivo, así que:

$$\cos\beta = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha \tag{1.16}$$

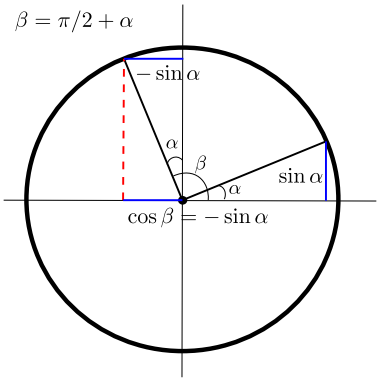


Figura 1.10: ¿Cuánto vale el $\cos(\pi/2 + \alpha)$?

Trabajo de varias fuerzas

Si hay varias fuerzas actuando sobre un objeto el trabajo total es la suma con su signo de los trabajos de cada fuerza. Por ejemplo, si hay N fuerzas

$$W_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} W_i = W_1 + W_2 + W_3 \ldots W_N \tag{1.17}$$

Igualmente, como el desplazamiento es el mismo en todos los trabajos también se puede calcular sumando vectorialmente todas las fuerzas y calculando el trabajo de la fuerza neta o total

$$W_{\text{total}} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_N) \cdot \vec{d} = \vec{F}_{\text{total}} \cdot \vec{d} = F_{\text{total}} d \cos\theta \tag{1.18}$$

donde θ es el ángulo entre la fuerza total y el desplazamiento.

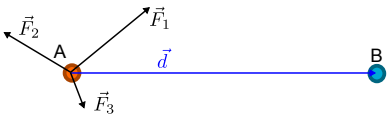


Figura 1.11: El trabajo de varias fuerzas que actúan sobre el mismo cuerpo es la suma de los trabajos individuales o el trabajo de la fuerza neta.

Potencia

La potencia se define como la cantidad de trabajo realizada dividido por el tiempo que se tarda en realizar ese trabajo:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \tag{1.19}$$

Sus unidades son

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = 1\,\mathrm{J/s} = 1\,\mathrm{W} \tag{1.20}$$

En el caso particular de $F = cte.$ en la dirección de un movimiento con $v = cte.$ entonces:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Fd}{\Delta t} = Fv \tag{1.21}$$

1.4 *Energía*

La energía es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo. Por ejemplo, cuando una fuerza hace un trabajo positivo sobre un cuerpo, este puede guardar ese trabajo en forma de energía, y luego devolverlo, esto es, realizar trabajo sobre otros cuerpos. Hay muchos tipos de energía, por ejemplo la energía cinética, asociada a la velocidad del cuerpo.

Energía cinética

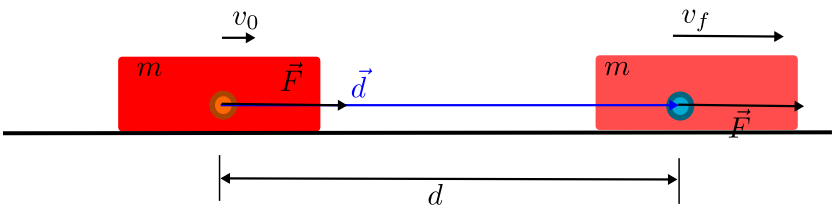


Figura 1.12: Una fuerza constante actúa en la dirección del movimiento, aumentando la velocidad.

Un ejemplo de energía es la *energía cinética*. Supongamos la siguiente situación: una F_{neta} constante actúa sobre un cuerpo inicialmente a velocidad v_0 y le imprime una aceleración constante llegando a una velocidad v_f. El trabajo es

$$F_{\text{neta}} = ma \tag{1.22}$$

$$W_{\text{neto}} = F_{\text{neta}} d = mad \tag{1.23}$$

donde hemos utilizado la segunda ley de Newton. Además, en un

movimiento uniformemente acelerado sabemos que

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_f - v_0}{a} \tag{1.24}$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad d = v_0 \frac{(v_f - v_0)}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{(v_f - v_0)^2}{\cancel{a}^1} \tag{1.25}$$

siendo v_0 y v_f las velocidades inicial y final, d la distancia recorrida, t el tiempo y a la aceleración. Despejando la aceleración a en la última expresión y simplificando:

$$a = \frac{1}{d}\left[v_0 v_f - v_0^2 + \frac{1}{2}(v_f^2 + v_0^2 - 2v_0 v_f)\right] = \frac{(v_f^2 - v_0^2)}{2d} \tag{1.26}$$

Sustituyendo esta última expresión en la del trabajo (1.23) tenemos

$$W_{\text{neto}} = mad = m\frac{(v_f^2 - v_0^2)}{2\cancel{d}}\cancel{d} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{1.27}$$

Resumiendo, el trabajo de la fuerza neta que actúa sobre una masa m es igual al cambio o variación de la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ entre el valor inicial y final, cantidad que se conoce como *energía cinética* pues está asociada a la velocidad

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow W_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{cf} - E_{c0} = \Delta E_c \tag{1.28}$$

Aunque lo hemos deducido para un caso sencillo, rectilíneo y de aceleración constante, es totalmente general:

El trabajo neto efectuado sobre un objeto es igual a la variación o cambio de su energía cinética

Además

$$W_{\text{neto}} > 0 \quad \Rightarrow \Delta E_c > 0 \Rightarrow Ec_f > Ec_0 \tag{1.29}$$

$$W_{\text{neto}} < 0 \quad \Rightarrow \Delta E_c < 0 \Rightarrow Ec_f < Ec_0 \tag{1.30}$$

Si el $W > 0$ la E_c aumenta y si $W < 0$ la E_c disminuye

Tiene sentido pues $W < 0$ significa que la fuerza tiene una componente en contra del desplazamiento y tiende a frenarlo.

Como la energía es igual al trabajo, sus unidades son las mismas

$$[E] = [W] = 1\,\text{J} \tag{1.31}$$

Energía cinética como capacidad para hacer trabajo

Acabamos de ver cómo se puede acumular energía cinética haciendo trabajo sobre el cuerpo. Veamos ahora que la energía cinética acumulada se puede emplear para realizar trabajo sobre otro cuerpo con el siguiente ejemplo.

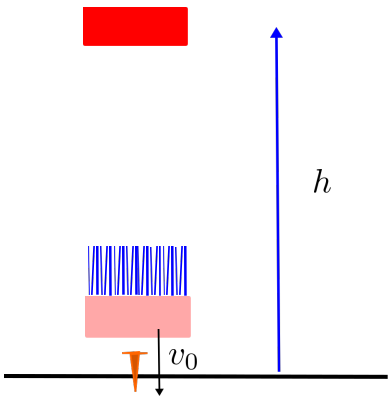


Figura 1.13: Un bloque choca con un pequeño clavo a velocidad v_0 y lo desplaza, haciendo trabajo sobre él.

Supongamos un gran bloque de masa m_b está sujeto a una determinada altura sobre un pequeño clavo de masa mucho menor, parcialmente clavado sobre el suelo (figura 1.13). Si soltamos el bloque este adquirirá una cierta velocidad v_0 al llegar al clavo, impactará contra el clavo desplazándolo un distancia y haciendo trabajo sobre el clavo. Suponiendo que en la colisión con el clavo el bloque no disminuye su velocidad, lo que es una buena aproximación si es mucho más masivo que el clavo, podemos calcular el trabajo que es capaz de hacer. La energía cinética que lleva el bloque es

$$E_{c0} = \frac{1}{2} m_b v_0^2 \tag{1.32}$$

La energía cinética final del bloque es nula ($E_{cf} = 0$) pues acaba en reposo El bloque pierde energía cinética. ¿Dónde va esa energía? Suponiendo que golpea exclusivamente sobre el clavo y no hay deformaciones[3], se ha empleado en hacer trabajo contra el clavo. En principio es la fuerza que ejerce el bloque contra el clavo por la distancia recorrida (suponiendo una fuerza constante), pero esa fuerza es difícil de calcular. Por un lado tenemos la 3ª ley de Newton, la fuerza del bloque sobre el clavo es la misma, con sentido contrario, que la del clavo sobre el bloque, y entonces usando el resultado de (1.14)

$$W_{bc} = -W_{cb} \tag{1.33}$$

el trabajo del bloque sobre el clavo W_{bc} es el opuesto del trabajo del clavo sobre el bloque W_{cb}. El trabajo hecho sobre el bloque es igual a la variación de energía cinética así que el trabajo hecho sobre el clavo es igual a la variación de energía cinética, y entonces

$$W_{bc} = -W_{cb} = -\Delta E_c = E_{c0} - E_{cf} = \frac{1}{2} m_b v_0^2 \tag{1.34}$$

Vemos que el trabajo que el bloque puede efectuar coincide con la energía (cinética) que tenía inicialmente. En general, debido a fenómenos disipativos el trabajo realmente efectuado en otras situaciones puede ser menor, bien en la colisión misma (inelástica) o en otros fenómenos, una parte se puede transmitir al medio en forma de calor, pero nunca será mayor.

[3] Estamos suponiendo que el bloque se frena del todo al clavar el clavo completamente y cuando impacta en el suelo ya está parado. Si no, parte de la energía cinética se absorbería por el suelo

Trabajo de la fuerza de la gravedad.

Para entender el segundo tipo de energía, la energía potencial gravitatoria, necesitamos 3 ideas.

1. **Trabajo de la fuerza de la gravedad en un movimiento vertical**. Un objeto de masa m en la superficie de la Tierra sufre una fuerza hacia abajo que es su peso $F = mg$. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de la gravedad (o peso) cuando un objeto se desplaza una cierta

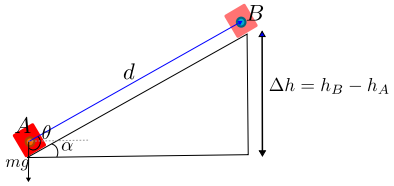


Figura 1.14: Un objeto sube por un plano inclinado. El trabajo de la gravedad solo depende de la diferencia de altura final e inicial y no del ángulo α

distancia vertical? Según la definición, el trabajo de la gravedad para llevar un objeto de masa m desde un punto A a uno B en una trayectoria vertical es

$$W^g_{AB} = Fd\cos\theta = -mg(h_B - h_A) = -mg\Delta h \tag{1.35}$$

donde hemos llamado $\Delta h = h_B - h_A$ a la diferencia de alturas. Si $\Delta h > 0$ (sube) entonces $W^g_{AB} < 0$ y si $\Delta h < 0$ (baja) entonces $W^g_{AB} > 0$.

2. **El trabajo de la fuerza gravitatoria depende solo de la diferencia de alturas, no de la trayectoria concreta**. Por ejemplo, el trabajo de g al subir un objeto en un plano inclinado un ángulo α sobre la horizontal (figura 1.14) es según la definición

$$W^g_{AB} = Fd\cos\theta = -mgd\sin\alpha \tag{1.36}$$

donde hemos usado el resultado del ejemplo 1.3.2 porque $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, como se ve en el detalle en la figura 1.15. Ahora, la cantidad $d\sin\alpha$ es la altura del plano, o bien, $d\sin\alpha = (h_B - h_A) = \Delta h$ (ver figura 1.16) y entonces

$$W^g_{AB} = Fd\cos\theta = -mgd\sin\alpha = -mg\Delta h \tag{1.37}$$

esto es, no depende del ángulo concreto, solo de la diferencia de alturas. Como no depende del ángulo de subida, en una trayectoria general como las de la figura 1.17 tenemos el mismo resultado $-mg\Delta h$. Además eso hace que el trabajo coincida para para cualquier trayectoria que empiece en A y termine en B, como las trayectorias 1 y 2 de la figura 1.17

$$W^1_{AB} = W^2_{AB} = -mg\Delta h \tag{1.38}$$

3. **El trabajo realizado en contra de la gravedad**. El trabajo que tenemos que realizar si queremos subir un objeto en contra de la fuerza de la gravedad, esto es, haciendo nosotros exactamente una fuerza mg pero hacia arriba (figura 1.18) es el mismo pero de signo contrario al de la gravedad. En efecto, aplicando el resultado (1.14)

$$W^{\text{contra g}}_{AB} = -W^g_{AB} = -(-mg\Delta h) = mg\Delta h = mg(h_B - h_A) \tag{1.39}$$

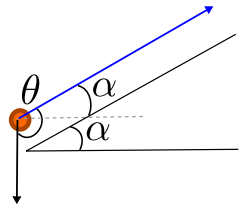


Figura 1.15: Detalle del pico del plano inclinado donde se ve que $\theta = \pi/2 + \alpha$

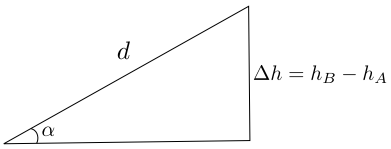


Figura 1.16: Según la definición de seno $\sin\alpha = \frac{\Delta h}{d}$ y despejando $\Delta h = d\ sin\alpha$

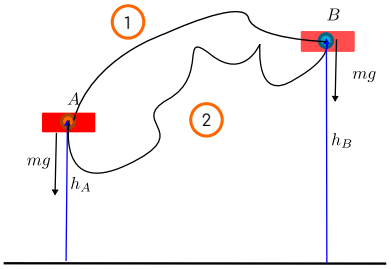


Figura 1.17: El trabajo de la fuerza de la gravedad es independiente de la trayectoria concreta y solo depende de la diferencia de alturas entre el punto final y el inicial $\Delta h = h_B - h_A$.

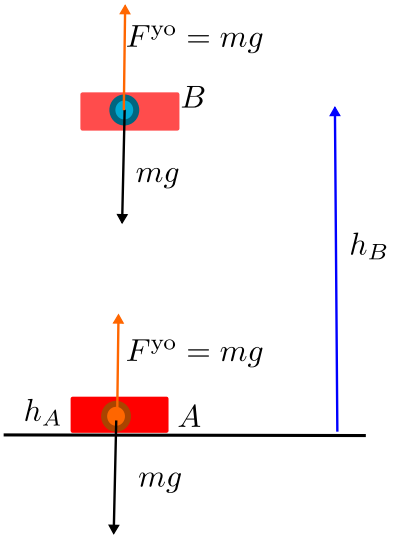


Figura 1.18: Trabajo en contra de la fuerza de la gravedad. Subimos el cuerpo con una fuerza hacia arriba exactamente igual al peso.

1.5 *Energía potencial gravitatoria*

Hemos visto que un cuerpo tiene energía si lleva una cierta velocidad. También puede tener capacidad de hacer trabajo por estar a una determinada altura h sobre el suelo. Supongamos un cuerpo de masa m inicialmente en el suelo $h_0 = 0$ en reposo. Lo subimos haciendo

una fuerza mg hacia arriba sobre él hasta una altura final $h_f = h$ (como en la figura 1.18), realizando un trabajo según 1.39

$$W^{\text{contra g}} = -W^g = -(-mg\Delta h) = mg\Delta h = mg(h-0) = mgh \quad (1.40)$$

Este trabajo queda almacenado como energía potencial gravitatoria. ¿Cuánto trabajo puede hacer esta masa por estar a altura h? Si lo dejamos caer sobre un clavo en el suelo, adquirirá una velocidad v al llegar al suelo. Cuando golpee hará fuerza sobre el clavo y éste se desplazará así que el cuerpo hará trabajo. Al igual que en la discusión anterior acerca del bloque que impacta con el clavo, cuando la masa m llega al suelo con velocidad v puede hacer un trabajo igual a su energía cinética

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.41)$$

pero en una caída libre sabemos que la velocidad final cumple $v^2 = 2gh$ (por ejemplo, de la ecuación (1.26) tomando velocidad inicial nula y $a = g$). Así que

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m2gh = mgh \quad (1.42)$$

Exactamente el mismo trabajo que habíamos hecho para subirlo ahí y que se almacenó como energía potencial.

Formalmente, definimos la energía potencial gravitatoria como

$$E_p = mgh \quad (1.43)$$

donde h es una altura sobre un determinado nivel de referencia.

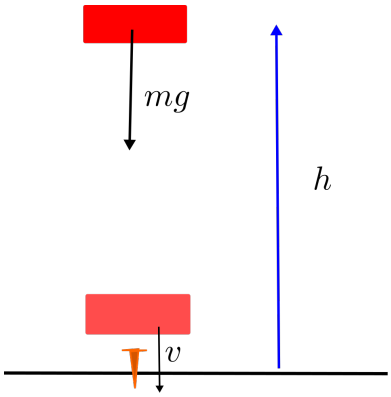


Figura 1.19: Un objeto de masa m a altura h tiene energía potencial mgh y puede hacer un trabajo mgh por ejemplo contra el clavo contra el que golpea.

Trabajo de la fuerza de la gravedad y energía potencial

El trabajo que hace la gravedad al llevar una masa m de un punto a altura h_A a otra h_B es

$$W^g_{AB} = -mg(h_B - h_A) = mgh_A - mgh_B = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p \quad (1.44)$$

y como hemos visto en la sección 1.4 esto es siempre así independientemente del camino que sigamos desde A a B. Esto nos permite decir que un cuerpo tiene energía potencial por estar a altura h simplemente. Si el trabajo dependiera del camino, habría que especificar cómo ha llegado hasta allí y la energía potencial no tendría mucho sentido[4]

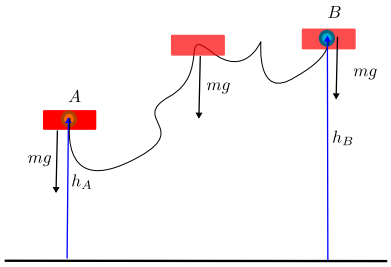


Figura 1.20: Trayectoria. El objeto se mueve de una altura h_A hasta una h_B bajo la acción del peso

1.6 *Conservación de la energía mecánica*

La conservación de la energía establece que la energía se puede transformar de unas formas a otras (energía cinética a potencial,

[4] La gravedad es una fuerza que se denomina conservativa, porque da lugar a una energía potencial asociada. Otras fuerzas conservativas son la fuerza elástica o eléctrica. No todas las fuerzas son así: el trabajo de la fuerza de rozamiento depende del recorrido, es una fuerza disipativa.

potencial a trabajo, etc) de forma que la cantidad total de energía se mantiene constante en el tiempo.

Veamos una situación general en la que un objeto en posición inicial 1 pasa a una posición final 2, modificando altura y velocidad, bajo la acción de la fuerza de la gravedad y otra posible fuerza externa F[5]. Según hemos visto, el trabajo neto (de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo) es

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c \tag{1.45}$$

Si actúa la gravedad mg y otra fuerza F y cada una hace un trabajo tenemos

$$W_{\text{neto}} = W_F + W_g = W_F - \Delta E_p \tag{1.46}$$

pues el trabajo de la gravedad es -ΔE_p según (1.44). Por tanto

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c = W_F - \Delta E_p \Rightarrow W_F = \Delta E_c + \Delta E_p \tag{1.47}$$

El trabajo de las fuerzas externas F que no son la gravedad, produce una variación en la energía, o bien potencial, o bien cinética, o ambas. Esto es la conservación de la energía. La energía se transforma en otras formas de energía o en trabajo y viceversa.

En el *caso particular* de que $W_F = 0$, entonces tenemos

$$\Delta E_p + \Delta E_c = 0 \tag{1.48}$$

La combinación $E_c + E_p$ se denomina energía mecánica E_m , así que otra manera de decir lo mismo es

$$\Delta E_m = \Delta E_p + \Delta E_c = 0 \tag{1.49}$$

o bien

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} = \text{cte.} \tag{1.50}$$

la energía mecánica es la misma en dos puntos 1 y 2 cualesquiera de la trayectoria cuando no hay trabajo de otras fuerzas externas que no sean la gravedad. Sustituyendo las expresiones de la energía cinética y potencial, tenemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \tag{1.51}$$

[5] La fuerza F puede ser la fuerza neta de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que no sean la gravedad, así que la situación es muy general

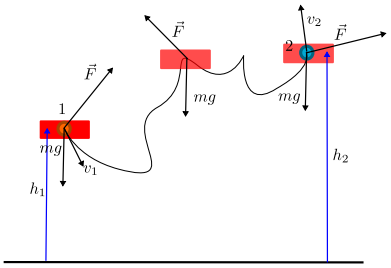


Figura 1.21: Trayectoria general de un objeto de masa m. Entre dos puntos cualesquiera se cumple que $W_F = \Delta E_c + \Delta E_p$

Ejemplo 1.6.1 Conservación de la energía mecánica

Un objeto de masa m parte del reposo en un punto inicial a una altura sobre el suelo de $y_1 = 10\,\text{m}$ y sigue una trayectoria bajo la única acción de la gravedad. ¿Con qué velocidad llega al suelo?

SOLUCIÓN

Como no hay otras fuerzas externas, se conserva la energía mecánica, así que la energía mecánica tiene el mismo valor en el punto inicial y el final y podemos igualarlas

$$E_{\text{mec}} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \tag{1.52}$$

Como parte del reposo $v_1 = 0$ y puesto que llega al suelo tomamos $y_2 = 0$. Queda

$$mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gy_1} = \sqrt{2(9{,}8\,\text{m/s}^2)(10\,\text{m})} = 14\,\text{m/s} \tag{1.53}$$

Además de energía potencial gravitatoria y cinética, existen otras formas de energía (calor, energía química, eléctrica, etc...) algunas de las cuales veremos durante el curso. El principio general de conservación de la energía nos dice que la energía se conserva si añadimos también esos tipos de energía a la ecuación. Veamos un ejemplo sencillo.

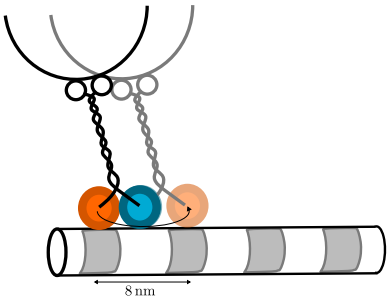


Figura 1.22: La kinesina es un motor molecular que se desplaza sobre los microtúbulos. Realiza un movimiento de "hand over hand" en el que cada una de las "cabezas" alternativamente avanza por delante de la otra en pasos de 8 nm por cada hidrólisis de 1 molécula de ATP.

Ejemplo 1.6.2 Kinesina

La kinesina es una proteína que funciona como un motor molecular que transporta cargas en la célula, avanzando en pasos de 8 nm cada vez que se hidroliza una molécula de ATP. En la hidrólisis del ATP se libera una energía (química) de unos $E_{ATP} = 7 \times 10^{-20}\,\text{J}$. Si suponemos que toda la energía liberada se transforma en trabajo al desplazar el motor y su carga, ¿cuál será la fuerza promedio aproximada que genera una kinesina?

SOLUCIÓN

Si suponemos que toda la energía liberada se transforma en trabajo y que la kinesina aplica la fuerza en la dirección del movimiento ($\cos\theta \approx 1$) tenemos

$$E_{ATP} = W = Fd \Rightarrow F = \frac{E_{ATP}}{d} \approx 8{,}8 \times 10^{-12}\,\text{N} = 8{,}8\,\text{pN} \tag{1.54}$$

El signo de aproximado viene porque primero, es un valor promedio, la kinesina podría ejercer picos de fuerza más altos en momentos puntuales, y segundo, desconocemos el valor exacto del ángulo. Además, veremos que en general una parte de la energía liberada puede perderse hacia el medio en forma de calor. No obstante con esta cuenta sencilla vemos que las fuerzas generadas son del orden de piconewtons. Hoy en día, ¡esas fuerzas tan pequeñas se pueden medir con precisión con las "pinzas ópticas"!

Las pulgas de perro (*Ctenocephalides canis*) de tamaño milimétrico llegan a saltar a una asombrosa altura de unos 50 cm. Con tan solo esta información y el principio de conservación de la energía podemos estimar las fuerzas que son capaces de ejercer en el salto, ¡sin necesidad de dinamómetro tamaño pulga! Lo vemos en el ejemplo siguiente.



Figura 1.23: Un pulga durante el salto. ¿Qué fuerza, en relación a su peso, son capaces de ejercer?

Ejemplo 1.6.3 Pulgas saltarinas

Una pulga que mide unos 4 mm alcanza una altura de 50 cm. ¿Cuál es la fuerza promedio aproximada que ejerce durante el salto? Calcule la fuerza en relación al peso de la pulga.

SOLUCIÓN

Para saltar, la pulga toma impulso, flexionando sus "rodillas" y bajando su centro de gravedad una pequeña distancia d. En un momento dado, realiza el salto ejerciendo una fuerza mientras recorre de nuevo esa pequeña distancia hacia arriba hasta que despega con una cierta velocidad inicial v_0. A partir de ahí, la única fuerza que actúa es la gravedad.

La conservación de la energía nos dice que el trabajo de la fuerza de impulso se convierte en energía cinética inicialmente. Después, esa energía cinética se transforma toda en potencial en el vuelo libre

$$W_F = Fd = \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \tag{1.6.3.1}$$

No sabemos la distancia d exacta que la pulga se agacha, pero no puede superar el tamaño del animal, así que podemos tomar $d \approx 4\,\text{mm}$. En la fórmula anterior hemos despreciado la pequeña energía potencial que tiene en el punto de despegue mgd ya que $d \ll h$ de modo que es despreciable. Despejando la fuerza tenemos:

$$F = mg\frac{h}{d} \tag{1.6.3.2}$$

Como el peso es $P = mg$ la fuerza que ejerce la pulga en relación a su peso es

$$\frac{F}{P} = \frac{h}{d} \simeq \frac{(50\,\text{cm})}{(4\,\text{mm})} = 125 \tag{1.6.3.3}$$

La pulga ejerce unas asombrosas 125 veces su propio peso. ¿Eres tú capaz de levantar 125 veces tu masa?

El trabajo Fd es una simplificación. Las pulgas tienen una proteína Resilina que funciona como un muelle y acumula tensión antes de saltar. Un modelo más adecuado sería modelar la fuerza como la de

un muelle elástico. No obstante, el número es aproximadamente correcto. Por ejemplo, mediciones de la aceleración del movimiento de la pulga dan un valor para la relación F/P muy parecido de unas 135 veces[6].

[6] H C Bennet-Clark and E C A Lucey. The jump of the flea: a study of the energetics and a model of the mechanism. *Journal of Experimental Biology*, 47:18, 1967

1.7 *Fuerzas no conservativas. Movimiento con fricción*

Rozamiento con una superficie plana

No todas las fuerzas son conservativas y dan lugar a una energía potencial. Las fuerzas de rozamiento hacen trabajo, pero el trabajo depende del camino y no se conserva la energía mecánica total. Pensemos en un objeto que se sitúa en reposo encima de una superficie, como en la figura 1.24. Si permanece en reposo, su aceleración es necesariamente nula y por tanto la suma vectorial de fuerzas es 0. De esta forma, tiene que haber una fuerza que compensa su peso y esta es la reacción de la superficie o "normal", indicada en la figura 1.24 como $\vec{N}$.

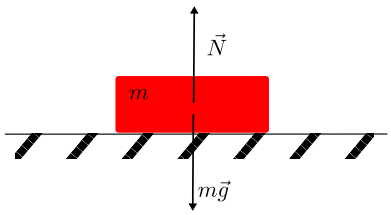


Figura 1.24: Peso y normal de un objeto en reposo sobre una superficie. En este caso $|\vec{N}| = |m\vec{g}|$

- **Normal.** La normal es la fuerza que ejerce una superficie sobre un objeto situado en contacto con ella. Tiene como dirección la perpendicular a la superficie, sentido desde la superficie al objeto y en módulo es igual a la fuerza que el objeto ejerce sobre la superficie, según la tercera ley de Newton.

Si ahora aplicamos al objeto una pequeña fuerza en la dirección de la superficie (horizontal en este caso) $\vec{F}_{\text{hor}}$, es posible que no se mueva debido a la fricción con la superficie, como se indica en la figura 1.25. La superficie ejerce una fuerza de rozamiento en sentido contrario que compensa la fuerza aplicada. A esta fuerza se le llama fuerza de rozamiento *estática*, pues el objeto permanece estático respecto a la superficie.

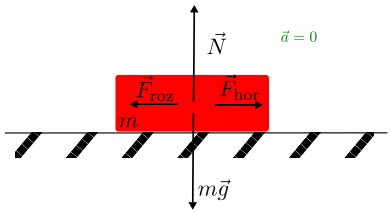


Figura 1.25: Diagrama de fuerzas de un objeto en reposo sobre una superficie con fuerza tangencial aplicada. Ahora $|\vec{N}| = |m\vec{g}|$ y $|\vec{F}_{\text{roz}}| = |\vec{F}_{\text{hor}}|$.

$$m\vec{g} + \vec{N} = 0 \text{ y } \vec{F}_{\text{roz}} + \vec{F}_{\text{hor}} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \tag{1.55}$$

Esta fuerza es en cierto sentido adaptativa, pues existe un rango de fuerzas horizontales aplicadas en el que el objeto no se moverá. Pasado un umbral, el objeto empezará a moverse. Ese umbral es proporcional a la fuerza normal $\vec{N}$ que acabamos de definir. La constante de proporcionalidad se denomina coeficiente de rozamiento estático μ_s, de modo que la fuerza de rozamiento estática es

$$|\vec{F}_{\text{roz}}| \leq \mu_s |\vec{N}| \tag{1.56}$$

El coeficiente de rozamiento estático no tiene unidades (es un número) y depende de cómo de pulidas o rugosas estén las superficies.

Si la fuerza horizontal $\vec{F}_{\text{hor}}$ sobrepasa el máximo de la fuerza de rozamiento estática, el objeto comenzará a moverse o deslizar sobre la superficie como en la figura 1.26. Al movimiento se opone también una fuerza de rozamiento, que ahora es la fuerza de rozamiento *dinámica* y cuyo valor es

$$|\vec{F}_{\text{roz}}| = \mu_d |\vec{N}| \tag{1.57}$$

donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico que es similar al estático pero ligeramente inferior en general, por lo que es habitual tomar ambos como iguales y hablar de un solo coeficiente de rozamiento μ. La dirección de la fuerza de rozamiento es la misma de la velocidad y sentido contrario.

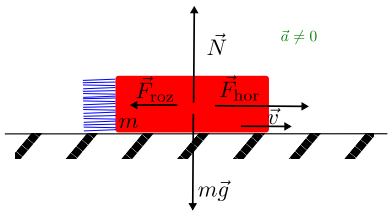


Figura 1.26: Diagrama de fuerzas de un objeto en reposo sobre una superficie con fuerza tangencial aplicada. Ahora $|\vec{N}| = |m\vec{g}|$ y $|\vec{F}_{\text{roz}}| = |\vec{F}_{\text{hor}}|$.

Fuerza de rozamiento en un fluido y velocidad terminal

Cuando un objeto se desplaza en el seno de un fluido, también aparece una fuerza de rozamiento, aunque tiene algunas características diferentes a la fuerza de rozamiento entre dos superficies sólidas. Supongamos que un objeto que parte del reposo se mueve bajo la acción de una fuerza, el peso P por ejemplo u otra fuerza F_{tira} que tiende a ponerlo en movimiento. Además de esta fuerza "que tira", en muchas ocasiones, a medida que el objeto toma velocidad aparece otra fuerza, que se opone al movimiento (tiene la misma dirección de la velocidad y sentido contrario) y que suele ser proporcional a la velocidad[7], como en la figura 1.27. Según la 2ª ley de Newton, tomando positivos los vectores hacia abajo:

$$P - F_{\text{roz}} = ma \Rightarrow P - bv = ma \tag{1.58}$$

donde tomamos el peso P como fuerza que tira y una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con una constante de proporcionalidad b. Si partimos del reposo, tenemos que la fuerza de rozamiento es nula inicialmente y pequeña al principio, por lo que habrá aceleración y el objeto empieza a caer. Llegará un momento que la velocidad será tal que la fuerza de rozamiento equilibra el peso. Entonces:

$$P = bv \Rightarrow P - bv = 0 = ma \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v = v_t = \text{cte.} \tag{1.59}$$

es decir, ya no hay aceleración y la velocidad permanece constante. A esta velocidad se la denomina *velocidad terminal*, y se puede conocer si sabemos la fuerza de arrastre (en este caso el peso P) y el coeficiente b ya que:

$$P = bv_t \Rightarrow v_t = \frac{P}{b} \tag{1.60}$$

[7] O al cuadrado de la velocidad, pero creciente con la velocidad en cualquier caso

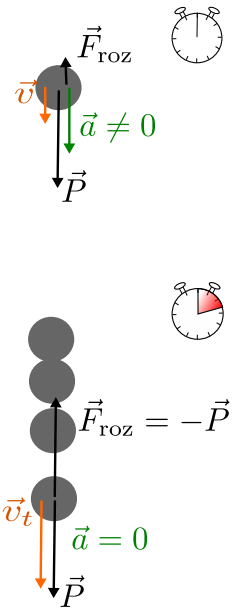


Figura 1.27: Inicialmente la velocidad y la fuerza de fricción son bajas, el móvil tiene aceleración y su velocidad aumenta (**arriba**). Tras un tiempo, la velocidad ha aumentado y la fuerza de fricción también, compensando exactamente la fuerza que arrastra, momento en el cual $a = 0$ y por tanto la v queda constante (**abajo**).

El origen de la fuerza de rozamiento puede ser diverso. Veremos algo más en el tema de fluidos. Las unidades de b se deducen de

$$b = \frac{P}{v} \Rightarrow [b] = \frac{[P]}{[v]} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s/m} = 1\,\mathrm{kg/s} \tag{1.61}$$

Potencia de la fuerza de arrastre y de la de rozamiento

Volviendo a la conservación de la energía, para un objeto cayendo a velocidad constante, ¿se conserva la energía mecánica? La respuesta es que no. Podemos en todo caso considerar la conservación de la energía más general al estilo de la ecuación 1.47, donde en este caso W_F sería el trabajo de la fuerza de rozamiento $W_F = F_{\mathrm{roz}}d$. Para mover un objeto a velocidad constante en contra de una fuerza de rozamiento hay que hacer trabajo constantemente. De hecho, la fuerza que arrastra F_{tira} tiene que proporcionar una potencia que se gasta (o disipa) en trabajo de la fuerza de rozamiento. La potencia mide la cantidad de energía o trabajo que se genera o se consume, dependiendo de la situación, por unidad de tiempo. En este caso de fuerza y velocidad constante, como vimos en (1.21), tenemos:

$$P_{\mathrm{tira}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F_{\mathrm{tira}}d}{\Delta t} = F_{\mathrm{tira}}v \tag{1.62}$$

sería la potencia que genera la fuerza que tira para mantener el objeto a velocidad v *en contra de la fuerza de rozamiento*. Hemos usado que en un intervalo Δt, la distancia recorrida es $d = v\Delta t$. En el caso de velocidad constante, ambas fuerzas son iguales (en módulo) y entonces

$$P_{\mathrm{tira}} = F_{\mathrm{tira}}v = F_{\mathrm{roz}}v = P_{\mathrm{roz}} \tag{1.63}$$

que confirma que a la velocidad terminal, la potencia generada por la fuerza que arrastra se disipa por el rozamiento.

Hasta ahora hemos visto solo dinámica en movimiento rectilíneo. En la última sección del tema, introducimos brevemente nociones básicas de fuerzas que tienden a producir giros.

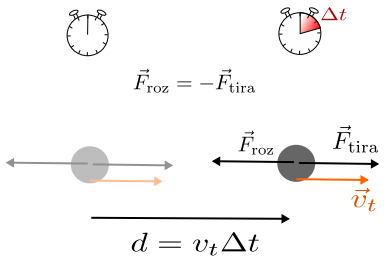


Figura 1.28: Como las fuerzas son iguales y el desplazamiento también, el trabajo de la fuerza de rozamiento y la que arrastra son iguales (en valor absoluto, estrictamente el trabajo de la de arrastre es positivo, el trabajo de la de rozamiento sería negativo y su suma 0).

1.8 *Torque o momento de una fuerza.*

Imaginemos una puerta inicialmente en reposo. Para hacerla girar sobre sus ejes es necesario aplicar una fuerza en algún punto que no sea del eje de giro, como en la figura 1.29. De hecho, para la misma fuerza, será más fácil mover la puerta cuanto más lejos del eje se aplique. Al igual que las fuerzas producen aceleración ($F = ma$) en movimientos rotatorios tenemos que el momento de una fuerza o torque, produce una aceleración angular, esto es una variación de la

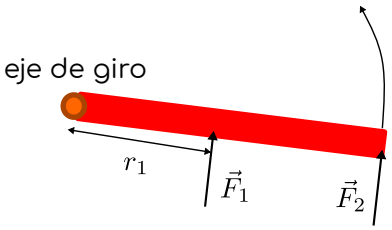


Figura 1.29: Resulta más fácil hacer girar una puerta aplicando una fuerza más lejos del eje como F_2 que en una posición más cercana como la de F_1.

velocidad de giro. El momento de una fuerza respecto de un punto O se define como[8]

$$\tau = Fr\sin\alpha \tag{1.64}$$

con

- F, módulo de la fuerza
- r, distancia entre el punto de aplicación de la fuerza y el eje de giro
- α, ángulo entre el vector que une el eje y el punto de aplicación (en un plano perpendicular al eje) y el vector fuerza como en la figura 1.30. Como el torque depende del seno, utilizar el ángulo suplementario ($\beta = 180 - \alpha$) da el mismo resultado.

[8] En realidad, el torque tiene carácter vectorial y se define como $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, donde $\vec{r}$ es el vector que une el eje de giro y el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$

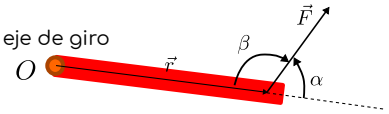


Figura 1.30: Vector $\vec{r}$ y ángulo α que entran en la definición del momento de la fuerza. Igualmente se puede usar el ángulo interno $\beta = 180 - \alpha$.

De la definición, las unidades de torque[9] son

$$[\tau] = [F][r] = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \tag{1.65}$$

[9] Formalmente $1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}$, sin embargo para torque es estándar usar la primera forma, para distinguirlo.

Cuando actúan más de una fuerza, el torque total es la suma de los torques individuales. Hay que considerar que fuerzas que hagan momento en sentidos de giro contrarios tenderán a compensarse. Para esto vamos a asignar un signo al torque:

- Tomamos signo $+$ para los torques que hacen girar contra las agujas del reloj
- Tomamos signo $-$ para los torques que hacen girar a favor de las agujas del reloj

Con este criterio, el torque total sobre un cuerpo es la suma de todos los torques aplicados cada uno con su signo.

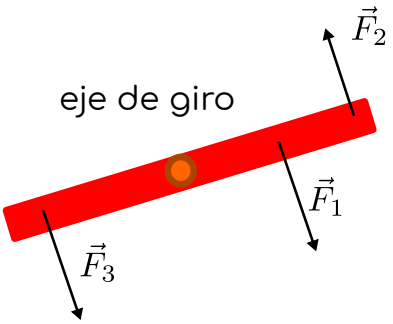


Figura 1.31: Los torques tienen signo. F_2 y F_3 dan lugar a un torque positivo, mientras que F_1 ejerce un torque negativo.

Un cuerpo en equilibrio

Un cuerpo está en equilibrio cuando no se mueve (no se traslada) ni gira. En tal caso, la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es nula. Esto hace que la aceleración sea nula y si su velocidad era 0 continuará así. Igualmente, para que permanezca con velocidad de rotación nula, la suma de momentos o momento total tiene que ser igualmente nula.

$$\text{Equilibrio} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + ... = 0 \end{cases} \tag{1.66}$$

Ambas ecuaciones han de cumplirse simultáneamente[10]. Veamos un ejemplo.

[10] La ecuación en vectores para las fuerzas se traduce en una ecuación para las componentes para cada eje

Ejemplo 1.8.1 Objeto en equilibrio

Una barra de masa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ y longitud $40\,\text{cm}$ dispuesta horizontalmente puede girar en torno a un eje fijo que pasa por su extremo izquierdo. El peso de la barra está aplicado en su centro. Una persona ejerce una fuerza F vertical hacia arriba en el extremo derecho de la barra. ¿Qué fuerza tiene que ejercer para mantener la barra horizontal?

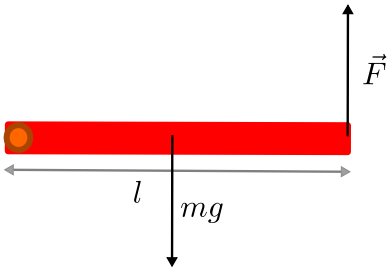


Figura 1.32: Uno esperaría que la fuerza en el extremo necesaria para mantener la barra horizontal es igual al peso. Esto es INCORRECTO!!

SOLUCIÓN

Intuitivamente uno podría pensar que la fuerza que tiene que hacer la persona es igual al peso de la barra $F = mg$. Pero esto no es así, porque en tal caso, si bien las fuerzas están equilibradas, el torque total sería[11]

$$\tau = lmg - \frac{l}{2}mg = \frac{l}{2}mg \neq 0 \tag{1.67}$$

y la barra giraría.

[11] IMPORTANTE: El peso de un objeto siempre se aplica en un punto que se llama centro de gravedad. Si el objeto es de densidad uniforme, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico, en este caso el punto medio de la barra, como en la figuras 1.32 y 1.33

La solución correcta es que el eje efectúa también una fuerza sobre la barra (es la reacción a la fuerza que ejerce la barra sobre el eje). Entonces, tomando las fuerzas hacia arriba como positivas y hacia abajo como negativas y con el criterio de signos para el torque, escribimos las 2 ecuaciones del equilibrio, una para fuerzas y otra para torques:

$$\begin{aligned} F_{\text{eje}} + F - mg = 0 \text{ (fuerzas, eje } y\text{)} \qquad (1.8.1.1)\\ Fl - mg\frac{l}{2} = 0 \text{ (torques)} \end{aligned}$$

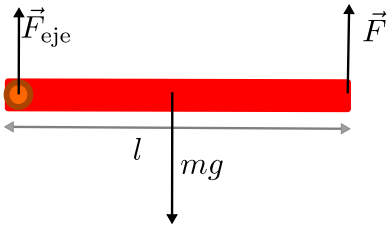


Figura 1.33: Diagrama de fuerzas correcto.

Dese cuenta de que la fuerza sobre el eje es desconocida en principio. La hemos tomado como positiva (hacia arriba) en principio. Si al resolver las ecuaciones resultara negativa, es que es una fuerza hacia abajo (de acuerdo con los signos que hemos tomado). Por otro lado, la fuerza del eje no hace momento, pues su distancia al eje es o. Finalmente, en este caso particular todos los ángulos que forman las fuerzas con la línea que une el eje con el punto de aplicación de la fuerza son rectos y el seno es 1.

De la segunda de las ecuaciones despejamos el valor de la fuerza

$$Fl - mg\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{mgl}{2l} = \frac{mg}{2} = \frac{(0{,}5\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m/s}^2)}{2} = 2{,}45\,\text{N} \tag{1.8.1.2}$$

Con este valor podemos también encontrar la fuerza del eje

$$F_{\text{eje}} + F - mg = 0 \Rightarrow F_{\text{eje}} = mg - F = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} = 2{,}45\,\text{N} \tag{1.8.1.3}$$

Como vemos, el eje soporta la mitad del peso y la persona la otra mitad, independientemente de la longitud total de la barra en este caso, por resultar totalmente simétrico. En general necesitamos las distancias concretas a las que se aplican las fuerzas.

2
Fluidos

2.1 *¿Qué son los fluidos y para qué los estudiamos?*

Los fluidos, **gases y líquidos**, se comportan de forma similar bajo la acción de fuerzas, aunque con algunas diferencias. Los fluidos son fundamentales para la vida, en particular el agua, y en este capítulo aprenderemos cómo es el movimiento del agua en diferentes condiciones, pero también cómo es el movimiento de objetos en el seno de los fluidos. Algunos ejemplos que discutiremos son las diferencias de presión en la sangre, la sedimentación o centrifugación de proteínas, o el vuelo de las aves.

Estudiaremos primero las propiedades de los fluidos en reposo o **hidrostática** y a continuación las características de los fluidos en movimiento o **hidrodinámica**. Finalizaremos el tema con la **tensión superficial**.

En este tema:
- hidrostática
- hidrodinámica
- tensión superficial

2.2 *Propiedades de los fluidos*

Densidad

La densidad se define como la relación entre la masa de un objeto y el volumen que ocupa:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2.1}$$

y es válida para sólidos, líquidos y gases. La densidad de sólidos y líquidos hechos de una sola sustancia varía un poco con las condiciones de temperatura y presión, mientras que en los gases es muy variable. La densidad de los gases, en condiciones habituales es menor que la de los líquidos. Sus unidades son

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{2.2}$$

En general: $\rho_{\text{liq}} \gg \rho_{\text{gas}}$. Las moléculas en un líquido suelen presentar fuerzas atractivas entre ellas, al contrario que los gases en las que se mueven más libremente.

2.3 *Líquidos y gases*

Líquidos y gases son fluidos y tienen muchas propiedades y comportamientos parecidos. No obstante, se diferencian en algunos aspectos:

1. La densidad de los líquidos suele ser mayor, por las fuerzas atractivas entre sus moléculas
2. Los líquidos son aproximadamente incompresibles. Hay que usar fuerzas muy elevadas para que su volumen disminuya. Por tanto, su densidad no cambia fácilmente. En los gases esto no es así en general y pueden comprimirse más fácilmente[1]. Para el resto del curso, cuando haya que distinguir, utilizaremos "líquido=fluido incompresible" y "gas=fluido compresible" o "fluido" cuando lo que digamos se aplique indistintamente a ambos.

[1] ¡Haz la prueba tú mismo comparando agua o aire dentro de una jeringuilla, tapando el orificio con un dedo y apretando el émbolo!

2.4 *Presión en fluidos*

La presión se define como una fuerza ejercida sobre una determinada superficie dividido por el área de dicha superficie (ver figura 2.1):

$$p = \frac{F}{A} \tag{2.3}$$

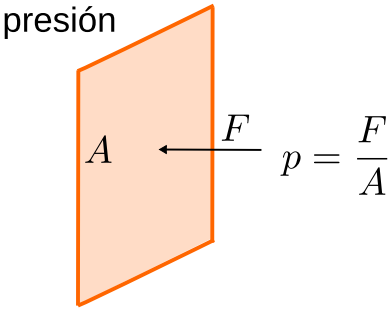


Figura 2.1: Definición de presión como fuerza por unidad de superficie.

Los fluidos ejercen presión sobre objetos sumergidos en su seno, sobre las paredes del contenedor o sobre cualquier parte del fluido mismo. La presión en un fluido en reposo tiene 2 importantes propiedades:

1. **En un fluido en reposo, la presión en un determinado punto del fluido es la misma en todas direcciones**.

Para demostrar esta afirmación imaginemos un pequeño cubo del propio fluido como en la figura 2.2. Si la presión por un lado del cubo fuera diferente a la presión por el lado contrario, la fuerza total sobre el cubo de fluido no sería nula, el cubo comenzaría a moverse y eso está descartado porque el fluido está en reposo.

2. **La fuerza debida a la presión ejercida por un fluido sobre un objeto en su seno o sobre la pared del recipiente que lo contiene es siempre perpendicular a la superficie.**

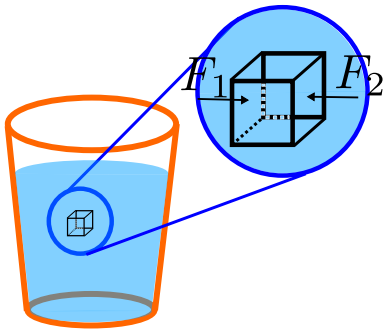


Figura 2.2: Fuerzas debidas a la presión en el seno de un fluido en reposo. Las fuerzas son iguales en todas direcciones (por ejemplo $F_1 = F_2$). Si no fuera así habría fuerza neta en un sentido y no se mantendría el reposo.

Si la fuerza que ejerce un fluido sobre su recipiente por ejemplo tuviera una componente tangencial a la superficie como en la figura 2.3, el fluido no estaría en reposo. La tercera de ley de Newton implica que la superficie haría fuerza sobre el fluido en dirección tangencial también, lo que haría que el fluido se desplazara[2].

[2] Nota muy técnica: La propiedad fundamental que distingue a los fluidos de los sólidos es que los fluidos no son rígidos y no resisten esfuerzos tangenciales y cualquier esfuerzo tangencial los pone en movimiento. Solo resisten esfuerzos de compresión mientras que los sólidos resisten ambos.

De (2.3), las unidades de presión son:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{1\,\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{Pa} \tag{2.4}$$

2.5 *Variación de la presión con la profundidad*

En un fluido en reposo sometido a la acción de la gravedad, la presión aumenta con la profundidad. Podemos calcular la variación de presión con profundidad fácilmente en un líquido que tiene una densidad fija ρ_f (fluido incompresible).[3]

Consideremos un cilindro de fluido de altura h y "tapas" horizontales de superficie S como en la figura 2.4. La tapa superior se encuentra en la superficie libre del fluido y la inferior a una profundidad h. **La presión se debe al peso de la columna de fluido situada por encima**. Así:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} \tag{2.5}$$

con m la masa del cilindro de fluido. Como el fluido tiene densidad ρ_f, entonces su masa es

$$m = \rho_f V = \rho_f S h \tag{2.6}$$

donde hemos usado el volumen de un cilindro $V = hS$. Retomando la presión, será:

$$p = \frac{mg}{S} = \frac{\rho_f \cancel{S} h}{\cancel{S}} = \rho_f g h \tag{2.7}$$

De ahí se ve que la p no depende del tamaño de la superficie S, ni de la forma. Podemos pensar en un cilindro muy estrechito de altura h y hablar de la *presión en un punto* dentro de un fluido. Es importante recordar:

1. La presión en un fluido aumenta con la profundidad
2. La presión en un fluido en reposo solo depende de la profundidad. A profundidades iguales, presiones iguales.

La ecuación (2.7) permite calcular diferencias de presión entre puntos a distintas alturas, o calcular la presión en otro punto a distinta profundidad:

$$p_2 - p_1 = \rho_f g(h_2 - h_1) \Rightarrow p_2 = p_1 + \rho_f g(h_2 - h_1) \tag{2.8}$$

Si queremos expresar la presión en función de alturas desde un nivel de referencia (el fondo por ejemplo), basta con darse cuenta de que $L = h + y$, donde L es la profundidad total del fluido, h la

En reposo: $F_{||} = 0$

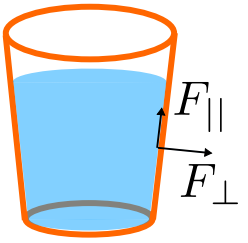


Figura 2.3: En un fluido en reposo las fuerzas de presión son perpendiculares a las superficies.

[3] En un gas es algo más complicado ya que el aumento de presión lo comprime y aumenta su densidad. Lo aplazamos hasta el tema de termodinámica.

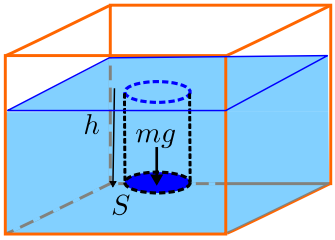


Figura 2.4: Variación de la presión con la profundidad.

profundidad del punto que nos interesa e y la altura de dicho punto sobre el fondo, de modo que (2.8) se convierte en:

$$p_2 = p_1 + \rho_f g(L - y_2 - L + y_1) = p_1 - \rho_f g(y_2 - y_1) \tag{2.9}$$

Finalmente, la expresión (2.7) solo tiene en cuenta el peso de la columna de fluido situada encima, no obstante, en la situación habitual en la que el recipiente se encuentra abierto a la atmósfera, hay que añadir la presión que ejerce la atmósfera P_0 quedando

$$p = P_0 + \rho_f g h \tag{2.10}$$

donde P_0=1,013 $\times$ 10^5 Pa[4]. La presión atmosférica, como se suma en todos los puntos, no afecta a las diferencias de presión.

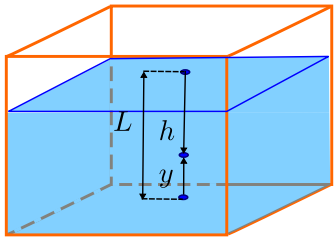


Figura 2.5: Podemos expresar las diferencias de presión en función de diferencias de alturas o de profundidades. El resultado es un signo cambiado en la expresión ya que la presión crece con la profundidad y disminuye con la altura.

[4] En la sección 2.8 veremos cómo se puede medir la presión atmosférica

2.6 *Presión absoluta y presión manométrica*

Muchas veces lo que interesa no es la presión total en un fluido si no cuánta presión hay *por encima de la atmosférica*. Un ejemplo es la presión en un neumático o un globo. Cuando está "vacío", tiene en realidad aire por dentro a presión atmosférica. Lo notamos blando porque la presión es la misma por los dos lados de la goma y por lo tanto la fuerza neta es cero. Cuando lo hinchamos, aumenta la presión por dentro, manteniéndolo tenso. La presión de un neumático o cualquier otra cosa por encima de la atmosférica se llama presión manométrica:

$$p_{\text{mano}} = p - P_0 \tag{2.11}$$

donde p es la presión total o absoluta. Otro ejemplo es la "tensión"[5] arterial, que siempre se da como presión manométrica.

[5] Aunque se conoce como tensión, es la presión (manométrica) de la sangre

2.7 *Medida de la presión manométrica. Manómetro de tubo en U*

Existen muchos medidores de presión. Con la ecuación (2.8) podemos medir presiones en un manómetro con forma de U parcialmente lleno de fluido (normalmente mercurio) y abierto por un extremo a la atmósfera y por otro al recipiente a presión que queremos medir, como en la figura 2.6.

La presión que queremos medir P es la misma que en la superficie del mercurio por el lado del globo P_A. Por otro lado, al estar el mercurio en equilibrio (si no lo está, esperamos un momento), la presión a alturas iguales es la misma y por tanto $P_B = P_A$. La presión en la superficie libre del mercurio es la atmosférica $P_C = P_0$. Finalmente, utilizando (2.8) relacionamos las dos presiones:

$$P = P_A = P_B = P_C + \rho_{Hg} g h = P_0 + \rho_{Hg} g h \tag{2.12}$$

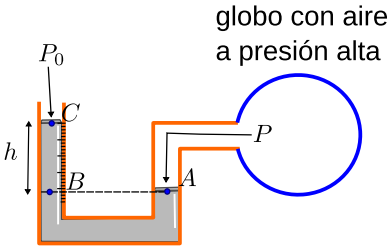


Figura 2.6: Manómetro en U, relleno de mercurio, para medida de presiones manométricas.

La presión manométrica del globo es por tanto

$$P_{\text{mano}} = P - P_0 = \rho_{Hg} g h \tag{2.13}$$

de modo que si graduamos el brazo izquierdo para poder medir alturas, podremos calcular la presión manométrica. Por ejemplo, si $h = 10\,\text{cm}$ y el líquido es mercurio de densidad $\rho_{Hg} = 13\,600\,\text{kg/m}^3$ la presión manométrica del globo será:

$$P_{\text{mano}} = \rho_{Hg} g h = (13\,600\,\text{kg/m}^3)(9{,}8\,\text{m/s}^2)(0{,}1\,\text{m}) = 1{,}33 \times 10^4\,\text{Pa} \tag{2.14}$$

El milímetro o centímetro de mercurio

Medir presiones midiendo diferencias de altura en una columna de mercurio ha llegado a ser tan habitual que ha dado origen a la unidad de presión del mmHg (milímetro de mercurio)[6]. Corresponde a la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura:

$$P(1\,\text{mmHg}) = \rho_{Hg} g h = (13\,600\,\text{kg/m}^3)(9{,}8\,\text{m/s}^2)(0{,}001\,\text{m}) = 133\,\text{Pa} \tag{2.15}$$

Para pasar cualquier cantidad de milímetros de mercurio a pascales basta utilizar $P = \rho_{Hg} g h$ y expresar h correctamente en metros (o usar el factor de conversión dado por (2.15)). Aunque menos común, también se usa el centímetro de mercurio. Cuando te dicen que tu tensión arterial es 12-6, significa en realidad que tu presión diastólica corresponde a 6 cmHg y la sistólica a 12 cmHg, ambos de presión manométrica.

[6] A veces se utiliza indistintamente con torr (símbolo Torr), en honor a Torricelli, ver sección siguiente, aunque son ligeramente diferentes por su definición. Ninguno es parte del sistema internacional.

Ejemplo 2.7.1 **Presión arterial en la jirafa.**

El cerebro de la jirafa se encuentra unos 2 m por encima del corazón. Calcule aproximadamente cuál es la presión mínima con la que debe bombear el corazón. Calcule también la presión arterial en las patas, que se encuentran unos 3 m por debajo del corazón.

Datos: Densidad de la sangre $\rho_s = 1050\,\text{kg/m}^3$

SOLUCIÓN

Según (2.9) tenemos

$$p_{\text{cer}} = p_{\text{cor}} - \rho_s g (y_{\text{cer}} - y_{\text{cor}}) \tag{2.7.1.1}$$

Despejando

$$p_{\text{cor}} = p_{\text{cer}} + \rho_s g (y_{\text{cer}} - y_{\text{cor}}) \tag{2.7.1.2}$$

La presión manométrica mínima de la sangre en el cerebro será 0, que corresponde a presión absoluta igual a la atmosférica P_0. En realidad será algo mayor, pero calculemos el mínimo. Tomando pues $p_{\text{cer}} = 0$ obtenemos

$$p_{\text{cor}} = \rho_s g (y_{\text{cer}} - y_{\text{cor}}) = (1050\,\text{kg/m}^3)(9{,}8\,\text{m/s}^2)(2\,\text{m}) \simeq 2{,}1 \times 10^4\,\text{Pa} \tag{2.7.1.3}$$

Podemos comparar esta presión mínima, con la mínima habitual en un humano. La presión diastólica normal en un adulto es de 80 mmHg. La presión de la jirafa corresponde a una columna de Hg de altura h:

$$p_{\text{cor}} = \rho_{Hg} g h \Rightarrow h = \frac{p_{\text{cor}}}{\rho_{Hg} g} = 0{,}155\,\text{m} = 155\,\text{mm} \tag{2.7.1.4}$$

esto es, 155 mmHg, casi el doble de la presión mínima en un adulto humano. Por otro lado, podemos calcular la presión de la sangre en los pies de la jirafa de igual modo:

$$p_{\text{pies}} = p_{\text{cor}} + \rho_s g(y_{\text{cor}} - y_{\text{pies}}) = 2{,}1 \times 10^4\,\text{Pa} + (1050\,\text{kg/m}^3)(9{,}8\,\text{m/s}^2)(3\,\text{m}) \simeq 5{,}15 \times 10^4\,\text{Pa} = 387\,\text{mm}Hg. \tag{2.7.1.5}$$

Para aguantar una presión tan alta, la piel de las patas de la jirafa es extraordinariamente firme.

2.8 *Medida de la presión atmosférica. Experimento de Torricelli*

El aire de la atmósfera, como cualquier fluido ejerce presión sobre los objetos sumergidos en él[7]. La presión atmosférica corresponde al peso de la columna de aire que tenemos por encima. ¿Cómo medimos la presión que ejerce la atmósfera? Torricelli midió la presión de la atmósfera en el siglo XVII con el siguiente experimento[8]. Tomó un tubo de vidrio abierto por un extremo lleno de mercurio y lo puso invertido sobre una cubeta llena de mercurio. El mercurio del tubo descendió hasta marcar un nivel unos 760 mm por encima de la superficie de la cubeta. La presión de la atmósfera sobre la superficie libre de la cubeta equilibra la presión de la columna de mercurio. De la figura 2.7 tenemos que

$$P_0 = P_{\text{hueco}} + \rho_{Hg} g h \tag{2.16}$$

siendo P_{hueco} la presión en el hueco superior que ha quedado en el tubo. En el hueco queda aproximadamente vacío y por tanto la presión ahí es $P_{\text{hueco}} \approx 0$. Conocida la densidad del mercurio podemos calcular P_0:

$$P_0 = \rho_{Hg} g h = (13\,600\,\text{kg/m}^3)(9{,}8\,\text{m/s}^2)(0{,}760\,\text{m}) \simeq 101 \times 10^3\,\text{Pa} \tag{2.17}$$

Aunque la presión atmosférica varía con la meteorología, se toma como valor de la presión atmosférica a nivel del mar el valor 1 atm = 101 325 Pa.

[7] Como lo expresó Torricelli, "vivimos bajo un océano de aire"

[8] Al parecer estaba en realidad tratando de entender por qué las bombas de agua de succión no podían elevar agua por encima de unos 10 m, un problema que le propuso su mentor Galileo Galilei

Unidad de presión	SI
1 atm	$1{,}013\,25 \times 10^5$ Pa
1 bar	$1{,}00 \times 10^5$ Pa

Tabla 2.1: Algunas unidades de presión útiles para medir la presión atmosférica y su equivalencia en el SI.

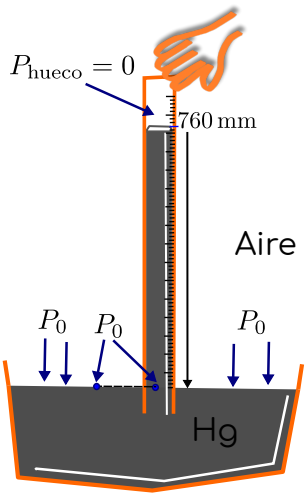


Figura 2.7: Experimento de Torricelli.

2.9 *Principio de Arquímedes.*

Al sumergir un cuerpo en un fluido, experimenta una fuerza vertical y hacia arriba (llamada empuje), pudiendo incluso flotar, dependiendo del cuerpo y el fluido. ¿De dónde proviene esa fuerza?

Es una consecuencia de que la presión aumente con la profundidad en el fluido. El fluido hace más fuerza sobre la parte inferior que la superior y la resultante es una fuerza hacia arriba. Lo podemos ver fácilmente en un cilindro de altura h y base A sumergido en un fluido en equilibrio de densidad ρ_f.

Como vemos en la figura 2.8, el fluido ejerce una fuerza F_1 hacia abajo en la cara superior y una fuerza F_2 hacia arriba en la cara inferior. Estas fuerzas provienen de la presión del fluido y sabemos que se dirigen de forma perpendicular a la superficie del objeto. De la definición de presión tenemos que:

$$p_1 = \frac{F_1}{A} \Rightarrow F_1 = p_1 A \tag{2.18}$$

$$p_2 = \frac{F_2}{A} \Rightarrow F_2 = p_2 A \tag{2.19}$$

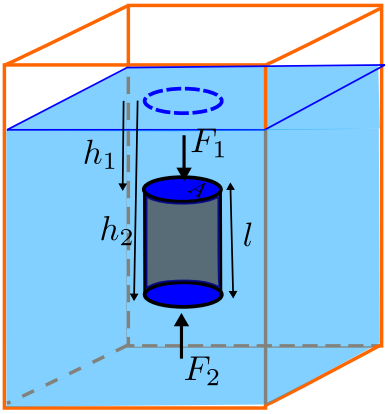


Figura 2.8: El empuje que experimentan los cuerpos sumergidos en fluidos es una consecuencia directa de que la presión del fluido aumenta con la profundidad.

Como la presión aumenta con la profundidad según $p = \rho g h$, tenemos para cada profundidad h_1 (tapa superior) y h_2 (tapa inferior):

$$F_1 = p_1 A = \rho_f g h_1 A \tag{2.20}$$

$$F_2 = p_2 A = \rho_f g h_2 A \tag{2.21}$$

Como $h_2 > h_1$, abajo hay mayor presión y el resultado neto es una fuerza neta hacia arriba, que es el empuje E

$$E = \rho_f g h_2 A - \rho_f g h_1 A = \rho_f g (h_2 - h_1) A = \rho_f g l A = \rho_f g V \tag{2.22}$$

donde hemos usado que la altura l del cilindro es $l = h_2 - h_1$ y el volumen del cilindro es $V = A \times l$. Esta expresión es interesante por 2 razones:

- Nos da la expresión del empuje sobre un cuerpo con un volumen V sumergido en un fluido de densidad ρ_f:

$$E = \rho_f g V \tag{2.23}$$

- La cantidad $\rho_f V$ corresponde a una masa de fluido m_f . Es la masa de fluido desalojado por el cuerpo al sumergirse. Así, el empuje es $E = m_f g$, esto es, el peso del fluido desalojado. Esta es la forma habitual de enunciar el principio de Arquímedes:

  "Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba equivalente al peso del fluido desalojado".

Aunque lo hemos calculado para un cilindro, el principio de Arquímedes es válido para cualquier cuerpo sumergido en un fluido en equilibrio, independiente de su forma. Se puede entender haciendo el siguiente experimento mental representado en la figura 2.9.

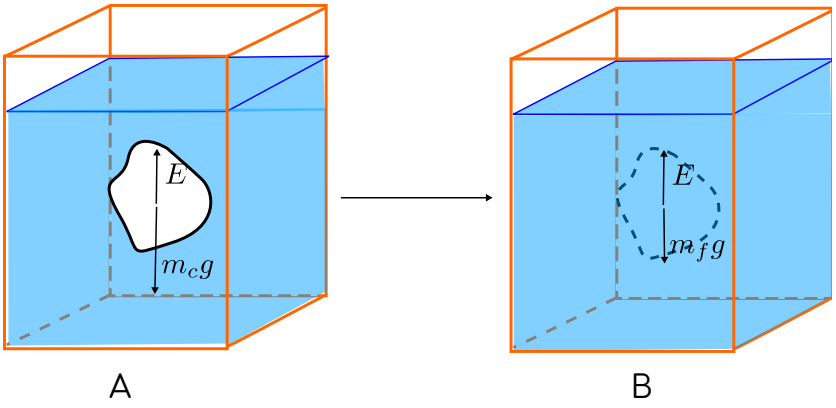


Figura 2.9: Principio de Arquímedes para un cuerpo de forma arbitraria. Situación A, cuerpo sumergido. Situación B, sustituimos el cuerpo por una cantidad de agua de volumen equivalente al cuerpo.

En la situación A, el cuerpo sumergido sufrirá un empuje E como resultado de las fuerzas de presión que ejerce el agua a su alrededor como acabamos de ver. Tomemos mentalmente el cuerpo y sustituyamoslo por un volumen equivalente de agua, como en la situación B. El empuje que ejerce el agua exterior al volumen marcado en la figura es igual que antes E, pues no hemos cambiado el agua externa. El agua que está dentro de la línea punteada tendrá un peso, correspondiente a su volumen, $m_f g = \rho_f g V$. Ahora bien, la situación B es un fluido en equilibrio, de modo que el empuje sobre la parcela imaginaria de fluido tiene que equilibrarse con su peso y entonces:

$$E = \rho_f g V \tag{2.24}$$

como queríamos demostrar.

Empuje y peso. Flotación

El empuje E ejercido sobre un cuerpo y su peso P, apuntan en la misma dirección y sentidos contrarios, siendo la fuerza resultante hacia arriba o hacia abajo según cuál sea mayor. Hay 3 situaciones posibles:

1. $E < P$. El cuerpo se hundirá.
2. $E = P$. El cuerpo está en equilibrio hidrostático. Esta es la situación aproximada de muchos organismos acuáticos de forma que pueden desplazarse en el agua sin tener que compensar ninguna fuerza ascendente ni descendente[9].
3. $E > P$. El cuerpo ascenderá. Puede quedar en equilibrio en la superficie con tan solo una fracción del volumen sumergido.

Podemos ver que en realidad esto tiene que ver con la relación entre las densidades del objeto o cuerpo sumergido ρ_c y la densidad

[9] Los peces con vejiga natatoria pueden controlar en cierta medida el empuje que sienten aumentando o disminuyendo el volumen de la vejiga

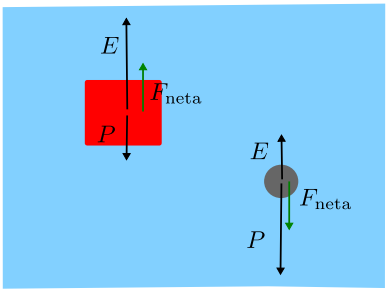
del fluido ρ_f. Por ejemplo, un cuerpo de volumen V totalmente sumergido estará en equilibrio si

$$E = P \Rightarrow \rho_f g V = m_c g \Rightarrow \rho_f V = m_c \tag{2.25}$$

Si el cuerpo tiene densidad $\rho_c = \frac{m_c}{V}$ tenemos

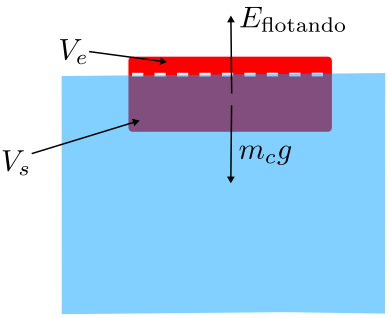
$$\rho_f V = m_c \Rightarrow \rho_f V = \rho_c V \Rightarrow \rho_f = \rho_c \tag{2.26}$$

El cuerpo estará en equilibrio si tiene igual densidad que el fluido. Igualmente se analizan los otros dos casos, dando lugar a



1. $E < P \Leftrightarrow \rho_f < \rho_c$ (se hunde)
2. $E = P \Leftrightarrow \rho_f = \rho_c$ (equilibrio)
3. $E > P \Leftrightarrow \rho_f > \rho_c$ (flota)

En el caso de la flotación $E > P$, podemos ver en qué situación queda el cuerpo en la superficie. En la superficie, una parte del volumen del cuerpo queda sumergido y otra emergido $V = V_s + V_e$. La parte sumergida es la única que desaloja fluido y por tanto el empuje en esta nueva situación es menor $E_{\text{flotando}} = \rho_f g V_s < \rho_f g V = E$, donde E es el empuje que sufre cuando está totalmente sumergido. En la situación de equilibrio, flotando en la superficie, el empuje iguala al peso



$E_{\text{flotando}} = m_c g$

Figura 2.10: Cuerpo flotando en un fluido con parte del volumen sumergido V_s y parte del volumen emergido V_e. Si está flotando en equilibrio (ni se hunde más, ni emerge más) el empuje iguala al peso

$$E_{\text{flotando}} = P \Rightarrow \rho_f g V_s = m_c g \Rightarrow \rho_f V_s = \rho_c V \tag{2.27}$$

De esta última expresión se puede ver por ejemplo que la fracción de cuerpo sumergida es igual a la relación entre las densidades del cuerpo y el fluido

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_f}. \tag{2.28}$$

Ejemplo 2.9.1 La punta del iceberg

La densidad del hielo es aproximadamente $900\,\text{kg/m}^3$y la del agua líquida unos $1000\,\text{kg/m}^3$. Calcule qué fracción del volumen total representa la parte del iceberg que vemos flotar por encima del agua.

SOLUCIÓN

El iceberg está flotando en equilibrio en el agua. De modo que su peso y su empuje están equilibrados. Suponiendo un volumen total $V = V_s + V_e$, según (2.28)

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_h}{\rho_f} = \frac{900\,\text{kg/m}^3}{1000\,\text{kg/m}^3} = 0{,}9 \tag{2.29}$$

El resto hasta 1 es la fracción de volumen emergido ($V_e/V + V_s/V = 1$):

$$V_e/V = 1 - V_s/V = 0{,}1 \tag{2.30}$$

Esto es el volumen emergido es 1/10 del volumen total y el volumen sumergido 9/10 del volumen total.

2.10 *Dinámica de fluidos*

La dinámica de fluidos estudia los fluidos en movimiento. Es un tema complejo, en especial la turbulencia. En general se pueden dar dos tipos de movimiento de los fluidos:

- Flujo laminar. Las capas vecinas de fluido se deslizan entre sí suavemente, las pequeñas porciones de fluido siguen una trayectoria lisa, suave, no hay cruces en las líneas de flujo o de corriente que indican cómo se mueven.
- Flujo turbulento. Las trayectorias se vuelven más complejas y enrevesadas, con la aparición de remolinos, vórtices, cambios bruscos en el tiempo, etc...

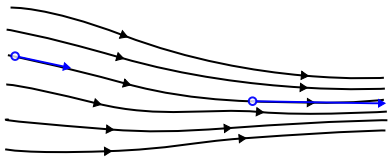


Figura 2.11: Flujo laminar. Las trayectorias de las partículas de fluido son suaves.

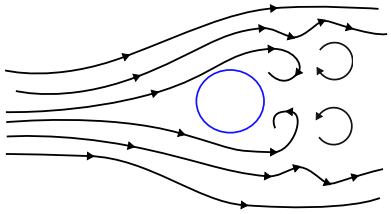


Figura 2.12: Flujo turbulento. Las trayectorias son irregulares, pueden aparecer remolinos.

Estudiaremos el flujo laminar.

2.11 *Flujo de masa y caudal*

Dos cantidades importantes en fluidos en movimiento son el flujo de masa y el caudal:

- Flujo de masa $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ es la masa de fluido que atraviesa una superficie por unidad de tiempo. Sus unidades son

$$\left[\frac{\Delta m}{\Delta t}\right] = 1\,\mathrm{kg/s} \tag{2.31}$$

- Caudal o gasto Q es el volumen de fluido que atraviesa una superficie por unidad de tiempo

$$[Q] = 1\,\mathrm{m^3/s} \tag{2.32}$$

La superficie que consideramos para ambos es una superficie perpendicular a la dirección de flujo, normalmente la sección del tubo o tubería por el que fluye el fluido. Ambos están también relacionados con la velocidad de flujo. Si tenemos una tubería de sección transversal de superficie A, y el fluido circula a velocidad v, en un intervalo Δt, el volumen de fluido que atravesará una sección transversal es aquel que se encuentra contenido en un cilindro de altura $v\Delta t$, como en la figura 2.13. El volumen del cilindro es $V = Av\Delta t$ y por tanto el volumen que fluye por unidad de tiempo es

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{Av\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = Av \Rightarrow Q = Av \tag{2.33}$$

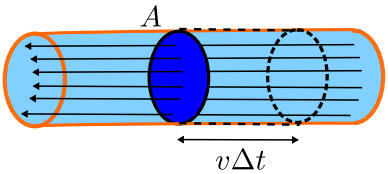


Figura 2.13: Caudal o flujo de masa. La cantidad de fluido que atraviesa la sección perpendicular de tubería en un intervalo de tiempo Δt es la que se encuentra a una distancia $v\Delta t$ o menor en la dirección del movimiento.

Para el flujo de masa basta con recordad la relación entre masa y volumen $m = \rho V$ (con ρ la densidad del fluido) de modo que

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho Q = \rho A v \tag{2.34}$$

2.12 Conservación de la masa o el caudal

Veamos una situación como la de la figura 2.14 en la que cambie la sección de la tubería, por ejemplo. No se pierde masa de fluido a través de las paredes, ni se crea ni se destruye masa. Entonces, el flujo de masa será el mismo en el punto 1 que en el 2, y así:

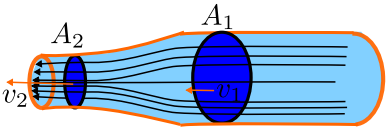


Figura 2.14: Conservación del caudal en una tubería que se estrecha.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{2.35}$$

Además, en fluidos incompresibles (líquidos sobre todo) la densidad es prácticamente constante independiente de las condiciones (de presión) y podemos tomar $\rho_1 = \rho_2$. En ese caso:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{2.36}$$

que es la conservación del caudal.

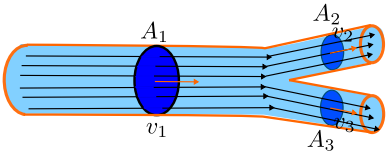


Figura 2.15: Ojo, la relación (2.36) solo es cierta si se conserva la masa entre las secciones consideradas, por ejemplo en esta otra situación, tendríamos $A_1 v_1 = A_2 v_2 + A_3 v_3$.

Una consecuencia de esta conservación del caudal es

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \Rightarrow \text{Si } A_1 > A_2 \Rightarrow v_2 > v_1 \tag{2.37}$$

que explica que los fluidos aumenten su velocidad cuando fluyen por sitios más estrechos.

2.13 Ecuación de Bernoulli

En un movimiento general de un fluido podemos establecer una relación entre la velocidad a la que fluye, la altura respecto de un nivel dado (el suelo por ejemplo) y la presión en el seno del fluido.

Esta relación se debe a Bernoulli y dice que para dos puntos cualesquiera de la trayectoria del fluido

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{2.38}$$

o bien que

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{cte} \tag{2.39}$$

en cualquier punto de la trayectoria, con

- ρ, densidad del fluido
- v, velocidad del fluido en un punto

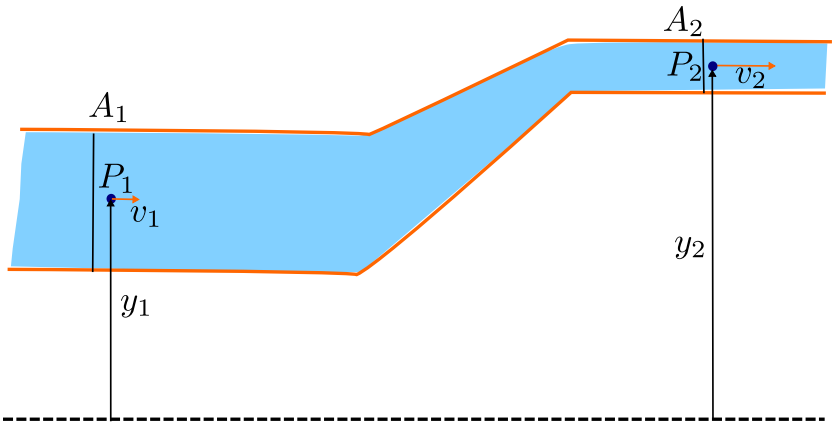


Figura 2.16: La ecuación de Bernoulli se puede aplicar a dos puntos cualesquiera del tubo de flujo, en determinadas condiciones.

- y, altura sobre un nivel de referencia de ese mismo punto
- P, presión (hidrostática) del fluido en ese punto.

El origen de esta ecuación es la conservación de la energía. Si consideramos un pequeño volumen V de fluido que pase por el punto 1 y 2 en su trayectoria, multiplicando por V la ecuación (2.38), reorganizando términos, y siendo $m = \rho V$ la masa asociada a ese pequeño volumen, tenemos:

$$(P_1 - P_2)V = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) + mg(y_2 - y_1) \tag{2.40}$$

Los términos de la derecha corresponden al cambio de energía cinética y potencial de la pequeña porción de fluido al pasar del punto 1 al 2. El término de la izquierda tiene unidades de energía también y corresponde al trabajo realizado por las fuerzas de presión sobre el volumen de fluido. De modo que podemos ver la ecuación de Bernoulli como la conservación de la energía, esto es, el trabajo de fuerzas externas (que no son la gravedad) es igual al cambio de energía mecánica (cinética+potencial).

La ecuación es válida cuando:

- El fluido es incompresible[10]
- No hay viscosidad (ya que viscosidad⇒ rozamiento y pérdida de energía por tanto)
- Flujo laminar (trayectorias suaves). Ver sección sobre número de Reynolds.
- Estado estacionario[11]

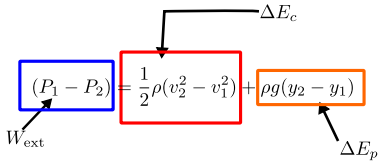


Figura 2.17: La ecuación de Bernoulli se corresponde con la conservación de energía. El trabajo de las fuerzas de presión es igual a la variación de energía cinética más potencial, calculadas las tres por unidad de volumen.

[10] En líquidos sobre todo, pero a veces también en gases si no hay diferencias de presión muy grandes

[11] Estado estacionario significa que ninguna propiedad cambia en el tiempo, aunque pueden cambiar de un punto a otro del espacio

2.14 *Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli*

Veamos algunos casos particulares y posibles aplicaciones de la ecuación.

Presión hidrostática

Supongamos un fluido en reposo ($v_1 = v_2 = 0$). Si tomamos el punto 1 en la superficie libre abierta a la atmósfera $P_1 = P_{\text{atm}}$, y el punto 2 a una profundidad $h > 0$ (1m, 2m,...) respecto de la superficie ($y_2 = y_1 - h$), la ecuación de Bernoulli nos dice

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \Rightarrow P_2 = P_{\text{atm}} + \rho g h \qquad (2.41)$$

Como se ve, Bernoulli contiene la ecuación de la hidrostática como caso particular cuando las velocidades son nulas.

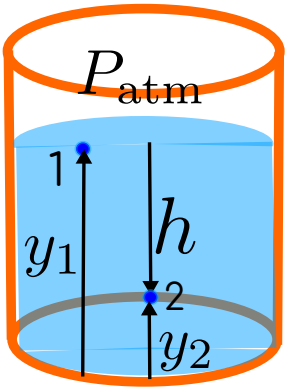


Figura 2.18: La presión a profundidad h en un líquido en reposo se puede calcular con la ecuación de la hidrostática o con la de Bernoulli sustituyendo $v_1 = v_2 = 0$.

Teorema de Torricelli

Aunque se puede deducir fácilmente de la ecuación de Bernoulli, fue enunciado previamente por Torricelli

Supongamos un depósito grande que se vacía por un agujero pequeño a una profundidad h respecto de su superficie. Podemos aplicar la ecuación de Bernoulli a un punto 1 en la superficie libre del fluido y un punto 2 a la salida del orificio:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \qquad (2.42)$$

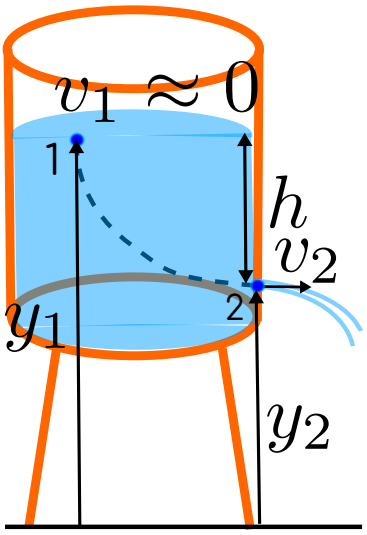
Ahora usamos que

- Tanto el punto 1 como el 2 están abiertos a la atmósfera, así que la presión es la atmosférica $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$
- El depósito es grande y el agujero pequeño, así que $v_1 \approx 0$
- La diferencia de alturas es la profundidad a la que está el agujero $y_2 - y_1 = h$

y queda

$$0 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2) + \rho g h \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \qquad (2.43)$$

El resultado coincide con la velocidad adquirida por una partícula en caída libre lanzada desde reposo desde una altura h que se obtiene por conservación de la energía.



Efecto Venturi

Si las diferencias de altura son despreciables $y_1 \approx y_2$ entonces queda

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (2.44)$$

esto es, en los puntos donde fluye a mayor velocidad, la presión es más baja. Esto se puede utilizar para explicar (parcialmente) el vuelo de las aves, aviones, y otros efectos como la posibilidad de los barcos veleros de navegar en contra del viento, el gol olímpico y otros fenómenos.

Aunque en la sección siguiente utilizaremos solo el efecto Venturi para analizar el vuelo, la realidad es más complicada y otros efectos y consideraciones desempeñan un papel igual o más importante en ocasiones, como el efecto Coanda o la desviación del viento provocada en la parte inferior del ala por un ángulo de ataque no nulo.

Vuelo de las aves

Supongamos un ave en vuelo horizontal, a velocidad v_{ave} respecto del aire que la rodea.

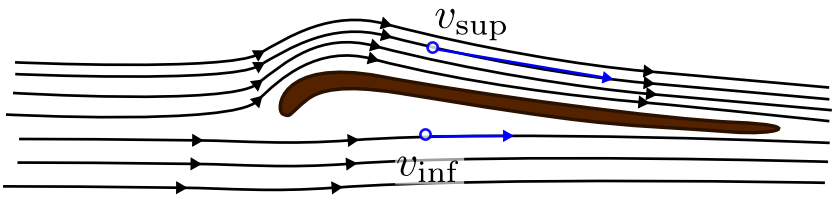


Figura 2.19: El aire circula más rápidamente por encima del ala, debido al perfil curvo. Esto se puede apreciar en un túnel de viento (con ala de avión normalmente) en que las líneas de corriente están más apretadas por la parte superior.

Debido al perfil curvo del ala, el aire pasa a mayor velocidad por la parte superior del ala, digamos a una velocidad $v_{\text{sup}} > v_{\text{ave}}$. Por la parte inferior, como el aire se desvía poco, podemos suponer una velocidad $v_{\text{inf}} = v_{\text{ave}}$. Despreciando diferencias de altura, tenemos que

$$P_{\text{inf}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{ave}}^2 = P_{\text{sup}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{sup}}^2 \tag{2.45}$$

Como $v_{\text{sup}} > v_{\text{ave}}$ entonces $P_{\text{sup}} < P_{\text{inf}}$. Al haber menos presión por arriba que por abajo del ala, el efecto neto es una fuerza vertical hacia arriba, llamada fuerza de sustentación. Recordando la relación entre presión y la fuerza total ejercida en una superficie, suponiendo un ala de superficie S, $P = F/S \Rightarrow F = PS$ se calcula la fuerza neta que actúa sobre el ala:

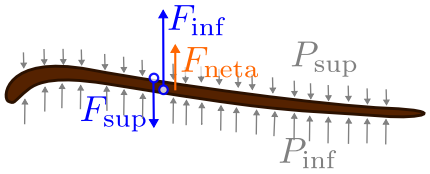


Figura 2.20: Diferencias en la velocidad superior e inferior se traducen en diferentes presiones y fuerzas ejercidas sobre el ala. Al haber mayor presión por el lado inferior que por el superior, resulta una fuerza total hacia arriba que sujeta el objeto en el vuelo.

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{inf}} - F_{\text{sup}} = (P_{\text{inf}} - P_{\text{sup}})S = \frac{1}{2}\rho(v_{\text{sup}}^2 - v_{\text{ave}}^2)S \tag{2.46}$$

donde hemos utilizado la expresión (2.45). Para que (2.46) resulte útil, necesitamos una relación entre v_{sup} y v_{ave}. Por ejemplo, supongamos que la v_{sup} es un pequeño porcentaje superior a v_{ave}, por ejemplo,

$v_{\text{sup}} = a v_{\text{ave}}$ con a una constante (1.1, 1.2 o así...). Entonces:

$$F_{\text{neta}} = \frac{1}{2}\rho(a^2 - 1)v_{\text{ave}}^2 S. \tag{2.47}$$

Aunque no es fundamental, normalmente se agrupa ese coeficiente así $C_L = (a^2 - 1)$ y se escribe

$$F_{\text{neta}} = \frac{1}{2}\rho C_L v_{\text{ave}}^2 S. \tag{2.48}$$

C_L recibe el nombre de coeficiente de sustentación y se suele obtener experimentalmente.

Una consecuencia directa de la expresión (2.48) es que la fuerza de sustentación es mayor cuanto mayor sea la velocidad del aire por debajo del ala. Por ejemplo, la fuerza de sustentación es mayor si se despega de cara al viento y de hecho las aves de gran tamaño (y los aviones comerciales) suelen despegar de ese modo. La relación entre la fuerza de sustentación y la masa del ave en vuelo horizontal o la velocidad de despegue se exploran en el siguiente ejemplo y en el cuadro opcional *Velocidad de despegue*.



Figura 2.21: Cigüeña blanca despegando desde el nido en contra del viento. La fuerza de sustentación aumenta con la velocidad del aire por debajo del ala. El viento de cara por tanto contribuye a aumentar la fuerza de sustentación. Dibujo de L.D.

Ejemplo 2.14.1 Vuelo de un águila

La velocidad del viento debajo del ala de un águila real volando horizontalmente es de 70 km/h. Por la parte superior del ala el aire circula a una velocidad de 77 km/h. El ala mide aproximadamente 190 cm × 20 cm. El ave está volando horizontalmente en equilibrio. Calcule:

a) La diferencia de presiones entre el lado inferior y superior del ala

b) La fuerza neta vertical sobre 1 ala

c) La masa del águila

Datos: Densidad del aire $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$

SOLUCIÓN

a) Utilizando la ecuación de Bernoulli, despreciando diferencias de altura:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{2.14.1.1}$$

con P_0 y v_0 presión y velocidad del aire debajo del ala y P_1 y v_1 presión y velocidad en la parte superior. La diferencia de presión será:

$$P_0 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(1{,}2\,\mathrm{kg/m^3})\left[\left(\frac{77}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2 - \left(\frac{70}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2\right] \simeq 47{,}6\,\mathrm{Pa} \tag{2.14.1.2}$$

b) La relación entre fuerza, superficie y presión nos permite calcular la fuerza neta:

$$F\mathrm{neta} = (P_0 - P_1)S = (47{,}6\,\mathrm{Pa})(190 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})(20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) \simeq 18\,\mathrm{N} \tag{2.14.1.3}$$

c) Volando horizontalmente, sin propulsarse con las alas, el peso del ave se tiene que compensar con la fuerza de sustentación sobre las 2 alas:

$$mg = 2F_{\mathrm{neta}} \Rightarrow m = \frac{2F}{g} \simeq 3{,}7\,\mathrm{kg} \tag{2.14.1.4}$$

Opcional.
Velocidad de despegue. Ley de escala. El avestruz y el gorrión

Piensa en la diferencia en el modo de despegue de las pequeñas aves como un gorrión y el flamenco. Un flamenco necesita adquirir cierta velocidad corriendo antes de despegar, mientras que un pajarillo puede comenzar a volar prácticamente desde parado. ¿Podemos explicar el fenómeno con lo que conocemos de la física del vuelo?
En el ejemplo anterior hemos visto que, si no tenemos en cuenta el efecto de batir las alas, en vuelo estable horizontal la fuerza de sustentación tiene que equilibrar el peso. Vamos a suponer que la velocidad de despegue es esa velocidad necesaria para mantenerse en el aire en equilibrio. A mayor peso del ave, mayor fuerza neta necesaria y, teniendo en cuenta la expresión (2.48), también significa mayor velocidad. Partiendo de (2.48), suponiendo 2 alas y equilibrando con el peso del ave tenemos:

$$mg = 2F_{\text{neta}} = \rho C_L v_{\text{ave}}^2 S \Rightarrow v_{\text{ave}} = \sqrt{\frac{mg}{C_L \rho S}} \tag{2.49}$$

Claramente, se aprecia que a mayor masa del ave, mayor será la velocidad necesaria para el despegue. Aunque queda una duda, normalmente un ave de mayor masa tiene mayor superficie alar S y como está en el denominador, tiende a hacer menor la velocidad necesaria para el despegue. ¿Qué efecto es mayor? Para analizar esto, veamos cómo varían masa m y superficie alar S con el tamaño o envergadura del ave. Supongamos una longitud determinada para el ave L, por ejemplo, de pico a cola, o la envergadura de ala a ala o cualquier otra longitud característica. Una ave de mayor L tendrá mayor S. De hecho, al ser una superficie, podemos pensar que la superficie del ala será proporcional a la longitud al cuadrado:

$$S \propto L^2, \text{ o bien } S = aL^2 \tag{2.50}$$

donde a es un cierto factor numérico o constante que supondremos igual para todas las aves.

Por otro lado, a mayor longitud, mayor volumen y por tanto mayor masa y peso del animal:

$$V \propto L^3, \text{ o bien } V = bL^3 \Rightarrow m = \rho_{\text{tejido}} V = \rho_{\text{tejido}} bL^3 \tag{2.51}$$

donde de nuevo b es un valor que tomaremos igual para toda ave, sea cual sea su valor. Llevando todo esto a la expresión de la velocidad de despegue (2.49):

$$v_{\text{ave}} = \sqrt{\frac{g\rho_{\text{tejido}} bL^3}{C_L \rho a L^2}} = \sqrt{\frac{g\rho_{\text{tejido}} b}{C_L \rho a}}\sqrt{L} = c\sqrt{L} \tag{2.52}$$

donde $c = \sqrt{\frac{g\rho_{\text{tejido}} b}{C_L \rho a}}$ es la misma constante para todos los animales al ser combinación de otras constantes.

De modo que vemos que efectivamente, a mayor envergadura o tamaño de ave, mayor es la velocidad de despegue, como parece razonable.

De hecho, podemos relacionar las velocidades de despegue de dos aves cualesquiera:

$$\frac{v_{\text{avestruz}}}{v_{\text{gorrion}}} = \frac{\cancel{\rho}\sqrt{L_{\text{avestruz}}}}{\cancel{\rho}\sqrt{L_{\text{gorrion}}}} = \sqrt{\frac{L_{\text{avestruz}}}{L_{\text{gorrion}}}} \tag{2.53}$$

Finalmente, conocidos los tamaños y la velocidad de despegue de uno, podemos estimar la velocidad del otro. Si para el gorrión tenemos $v_{\text{gorrion}} = 21\,\text{km/h}$ y el avestruz es unas 25 veces mayor ($L_{\text{avestruz}} = 25 L_{\text{gorrion}}$), obtenemos:

$$v_{\text{avestruz}} = v_{\text{gorrion}}\sqrt{\frac{L_{\text{avestruz}}}{L_{\text{gorrion}}}} = (21\,\text{km/h})\sqrt{25} \simeq 105\,\text{km/h} \tag{2.54}$$

¡No sorprende que un avestruz no pueda volar!

2.15 *Fluidos reales*

En esta sección vamos a tratar casos de fluidos reales, donde los efectos de rozamiento son importantes y la conservación de la energía no se da.

Viscosidad

La viscosidad es una propiedad de los fluidos que mide la resistencia a fluir cuando se les aplica una diferencia de presión, o una fuerza por unidad de superficie. Algunos fluidos como el aceite, la miel o la sangre son más viscosos que el agua y hay que aplicar mayor fuerza que para hacer fluir agua[12]. Los gases son en general menos viscosos que los fluidos.

Viscosidad y densidad son magnitudes distintas y no tienen relación en general. Por ejemplo, el aceite es más viscoso que el agua, pero menos denso.

[12] Una manera fácil de comprobar la mayor o menor viscosidad es poner el fluido en una jeringa y hacerlo fluir apretando el émbolo. ¿Cuándo cuesta más, con agua o con miel?

Definición

La viscosidad se puede definir (y se podría medir) con el siguiente experimento. Se coloca una delgada capa de fluido entre dos placas planas. La placa inferior está fija. La placa de arriba se puede mover, como en la figura 2.22.

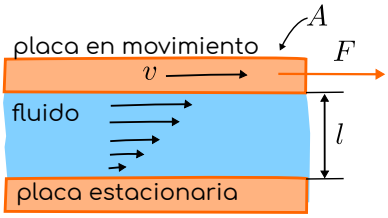


Figura 2.22: Definición de viscosidad. Vista lateral del experimento. La placa inferior está fija. Para mover la placa superior con velocidad constante v, es necesario aplicar una fuerza constante F. Las placas, aunque no se aprecia, tienen una superficie A.

Debido a las fuerzas de rozamiento entre capas de fluido y de las capas de fluido con las placas, para mover la placa de arriba a velocidad constante hace falta tirar de la placa con una determinada fuerza F. Debido al rozamiento también, la velocidad de diferentes capas de fluido es distinta, siendo nula al lado de la placa en reposo e igual a la velocidad de la placa superior justo debajo. La fuerza necesaria es proporcional al gradiente de velocidad (v/l) y al área de las placas[13]:

$$F \propto A\frac{v}{l} \tag{2.55}$$

La constante de proporcionalidad es la viscosidad y depende de qué fluido tengamos:

$$F = \eta A\frac{v}{l}. \tag{2.56}$$

Con este experimento podríamos obtener la viscosidad del fluido

$$\eta = \frac{Fl}{Av} \tag{2.57}$$

y también podemos ver que sus unidades en el SI son

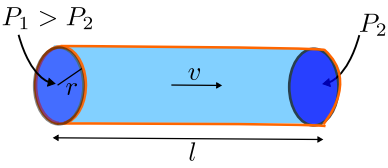
$$[\eta] = \frac{[F][l]}{[A][v]} = \frac{1\,\mathrm{Nm}}{\mathrm{m^2 m/s}} = 1\,\mathrm{Pa\cdot s}. \tag{2.58}$$

Sin embargo, esta situación de fluido entre dos placas es poco común, por lo que la ecuación (2.56) no resulta muy útil. La situación de la siguiente sección resulta mucho más frecuente.

[13] Esta fuerza F es una fuerza de cizalla, y en general no tiene que ver con la presión P hidrostática que hemos visto hasta ahora, si no que es de origen viscoso

Flujo viscoso en tubos. Ley de Poiseuille

Cuando hay viscosidad, para hacer fluir un fluido en un tubo hay que aplicarle una presión mayor por un lado que por el otro, esto es, una diferencia de presión $\Delta P = P_1 - P_2$, siendo P_1 y P_2 las presiones a uno y otro lado del tubo. [14]



[14] Las fuerzas viscosas son como la fuerza de rozamiento: Si no hubiera rozamiento, los objetos deslizarían indefinidamente sobre una superficie sin necesidad de aplicarles fuerza. El rozamiento frena el movimiento y en general para que continue moviéndose hay que aplicar una fuerza.

Existe una relación entre la velocidad de flujo, o el caudal, y la diferencia de presión aplicada:

$$P_1 - P_2 = QR \tag{2.59}$$

con Q el caudal. R se conoce con el nombre de *resistencia hidrodinámica* porque mide la oposición del tubo y el fluido a fluir. A mayor R, menor es el caudal para una diferencia de presión dada.

La resistencia hidrodinámica R tiene que aumentar con la viscosidad del fluido η. Además dependerá del tubo en cuestión, su forma, su tamaño. Para el caso de un tubo de sección circular, de radio r y longitud l, la resistencia es

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \tag{2.60}$$

de modo que el caudal y la presión se relacionan así:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{(P_1 - P_2)}{l} \tag{2.61}$$

que se denomina *ley de Poiseuille*. Las consecuencias más importantes de la ley de Poiseuille son

- El caudal es proporcional al gradiente de presión aplicado
- El caudal cambia enormemente con pequeñas variaciones del radio del tubo, debido a la dependencia r^4
- A mayor viscosidad, menos flujo, para el mismo gradiente de presión aplicado

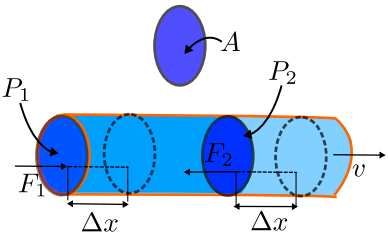


Figura 2.23: Fluido viscoso fluyendo como resultado de una diferencia de presiones en sus extremos $P_1 - P_2$. Se desplaza una distancia Δx en un tiempo Δt, a velocidad $v = \Delta x/\Delta t$.

[15] Las fuerzas viscosas son como un rozamiento, si se deja de impulsar, el fluido se para

Potencia desarrollada en el flujo viscoso

Otra consecuencia de la viscosidad es que para mantener el flujo hay que gastar energía constantemente[15]. Se puede calcular la potencia necesaria para mantener un caudal Q a través de un tubo de sección S como en la figura 2.23, entre cuyos extremos hay una diferencia de presión $P_1 - P_2$. En esa figura, el fluido entre los dos círculos azules sufre una fuerza neta $F_1 - F_2$ y si se desplaza una distancia Δx el trabajo realizado es:

$$W = (F_1 - F_2)\Delta x = (P_1 - P_2)A\Delta x = \Delta P A \Delta x \tag{2.62}$$

donde hemos utilizado que $P = F/A$, con A el área de la sección transversal de la tubería. La potencia es el trabajo por unidad de tiempo Δt, y si el fluido se mueve a velocidad $v = \Delta x/\Delta t$

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \Delta P A \frac{\Delta x}{\Delta t} = \Delta P A v = \Delta P Q \Rightarrow$$

$$\mathcal{P} = \Delta P Q \tag{2.63}$$

donde hemos usado que el caudal $Q = Av$. Es un buen ejercicio comprobar que el producto de presión por caudal tiene unidades de W.

Ejemplo 2.15.1 La potencia del corazón

Un corazón humano bombea unos 4.5 litros de sangre cada minuto. Si la presión arterial se considera en promedio 100 mmHg y la venosa despreciable (0 mmHg), calcule

a) La potencia desarrollada por el corazón para mover la sangre

b) El gasto de energía del corazón durante un día completo.

Datos: Densidad del mercurio $\rho_{Hg} = 13\,600\,\mathrm{kg/m^3}$

SOLUCIÓN

a)

$$\mathcal{P} = \Delta P Q = (100\,\mathrm{mmHg} - 0)(4{,}5\,\mathrm{L/min}) = (0{,}100\,\mathrm{m})(13\,600\,\mathrm{kg/m^3})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})\frac{(4{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m^3})}{60\,\mathrm{s}} = 1{,}0\,\mathrm{W} \tag{2.15.1.1}$$

b) Si suponemos constante esa potencia durante $t = 1\,\mathrm{d}$, la energía total será:

$$E = \mathcal{P}t = (1{,}0\,\mathrm{W})(1\times3600\times24\mathrm{s}) = 86\,400\,\mathrm{J} \tag{2.15.1.2}$$

Como veremos al estudiar el metabolismo humano, una persona consume una potencia de aproximadamente 100 W en promedio, por lo que el consumo del corazón supone en torno al 1 %

Número de Reynolds

Cuando la velocidad del flujo aumenta, el flujo puede dejar de ser laminar y volverse turbulento (con remolinos y gran variabilidad). La transición entre flujo laminar y turbulento está marcada por el *número de Reynolds*. Para una tubería de sección circular, el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{2vr\rho}{\eta} \tag{2.64}$$

con

- v velocidad (media) del fluido
- r radio de la tubería
- ρ densidad del fluido
- η viscosidad del fluido

El número de Reynolds no tiene dimensiones[16], las unidades son mismas en el numerador y en el denominador. De hecho mide la importancia de las fuerzas de tipo inercial, asociadas a la masa, en el numerador y el de las fuerzas de viscosidad en el denominador. Experimentalmente se ve que aproximadamente si

$$\begin{aligned} Re < 2000 &\Rightarrow \text{ flujo laminar} \\ Re > 2000 &\Rightarrow \text{ flujo turbulento} \end{aligned} \tag{2.65}$$

[16] Es una magnitud adimensional

La ley de Poiseuille que hemos visto en la sección anterior solo es válida en situaciones en las que el flujo es laminar ($Re < 2000$).

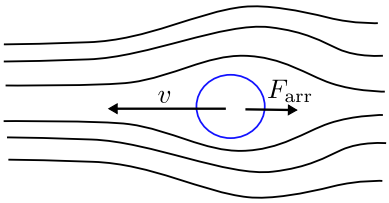


Figura 2.24: Fuerza de arrastre. Un objeto se mueve a velocidad v en el seno de un fluido. Aparece una fuerza que se opone al movimiento y cuyo valor aumenta con la velocidad.

Movimiento de un objeto en un fluido

Cuando un objeto se mueve en un fluido, aparece una fuerza, denominada fuerza de arrastre, que se opone al movimiento. En este sentido es similar a la fuerza de rozamiento con una superficie. A baja velocidad tiene origen viscoso y es proporcional a la velocidad

$$\text{Baja } v \Rightarrow \text{debida a } \eta \Rightarrow F_{\text{arr}} = bv \tag{2.66}$$

A alta velocidad, se debe a efectos inerciales y es proporcional a v^2:

$$\text{Alta } v \Rightarrow \text{debida a inercia} \Rightarrow F_{\text{arr}} = kv^2 \tag{2.67}$$

b y k son coeficientes de proporcionalidad que dependen de la forma del objeto y las propiedades del fluido. ¿Cómo distinguimos estos casos? Se utiliza otro número de Reynolds definido así

$$Re' = \frac{vL\rho}{\eta} \tag{2.68}$$

con

- v velocidad *del objeto* dentro del fluido
- L tamaño *del objeto* (lado, diámetro,etc...)
- ρ densidad *del fluido*
- η viscosidad *del fluido*

Si

$$\begin{aligned} &Re' < 1 \Rightarrow \text{ flujo laminar alrededor del objeto} \Rightarrow F_{\text{arr}} = bv \\ &Re' > 1 \Rightarrow \text{ flujo turbulento alrededor del objeto} \Rightarrow F_{\text{arr}} = kv^2 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Ley de Stokes

En situaciones en las que $Re' < 1$ y además el objeto es una esfera de radio r entonces b toma el valor $b = 6\pi r\eta$ y la fuerza de arrastre:

$$F_{\text{arr}} = 6\pi r\eta v \text{ (Para la esfera)} \tag{2.70}$$

Sedimentación

La sedimentación se puede utilizar para separar partículas sólidas en el seno de un fluido. Consiste en dejar actuar la gravedad, o una fuerza centrífuga, de modo que las partículas más densas que el

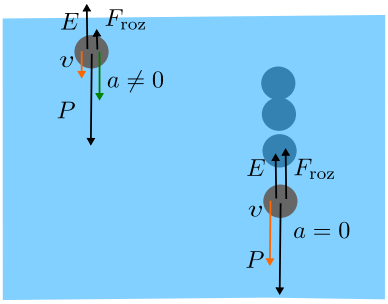


Figura 2.25: Fuerzas que actúan sobre un objeto sedimentando. **Izquierda:** La velocidad inicialmente es baja, lo que implica una fuerza de rozamiento pequeña, de modo que la fuerza total es hacia abajo, el cuerpo acelera por tanto hacia abajo y se hunde cada vez más deprisa. **Derecha:** Equilibrio. La velocidad es mayor, la fuerza de rozamiento también por tanto. La fuerza de rozamiento y el empuje equilibran el peso. La fuerza neta y la aceleración son nulas y por tanto la velocidad constante.

fluido tienden a depositarse en el fondo del recipiente. Además permite separar partículas según su tamaño o densidad, según veremos.

Consideremos una partícula de densidad ρ_p en un fluido ($\rho_p > \rho_f$). En reposo inicialmente, las fuerzas que actúan son el peso y el empuje. El peso es mayor que el empuje debido a la diferencia de densidad, y el sólido comienza a moverse hacia el fondo. En movimiento aparece una fuerza de arrastre, que va aumentando a medida que aumenta la velocidad ($F_{\text{arr}} = bv$). En determinado momento, la velocidad alcanza un valor tal que las fuerzas se equilibran:

$$mg - E - bv = 0 \tag{2.71}$$

Según la segunda ley de Newton ($\sum F = ma$) esto implica que a partir de ese momento la aceleración es nula y la velocidad es constante ($a = 0 \Rightarrow v = cte.$) y no aumenta más. Esta velocidad máxima se denomina velocidad límite o terminal y su valor se deduce de (2.71):

$$mg - E - bv = 0 \Rightarrow v = \frac{mg - E}{b} \tag{2.72}$$

Para el caso de una *esfera* de radio r podemos expresar todo en función solo de densidades, viscosidad y el radio.

$$E = \rho_f g V = \rho_f g \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{2.73}$$

$$mg = \rho_p V g = \rho_p g \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{2.74}$$

$$b = 6\pi\eta r \tag{2.75}$$

y entonces

$$v = \frac{mg - E}{k} \Rightarrow v = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_f)gr^2}{\eta} \text{ (Vel. terminal de una esfera)} \tag{2.76}$$

Consecuencias:

- Para partículas de igual densidad ρ_p (o muy similar), la velocidad límite es mayor para las partículas más grandes. Las partículas más grandes acabarán más cerca del fondo tras un tiempo de sedimentación.
- Para partículas de tamaño similar, acabarán separadas según densidades.
- En general, quedan ordenadas según el valor de la combinación $(\rho_p - \rho_f)r^2$ (g será la misma para todas).

Si el proceso es demasiado lento, se puede incrementar el valor de la velocidad de sedimenación mediante centrifugación. En una

centrifugadora, la aceleración centrífuga a_c desempeña el papel de la gravedad, de modo que la expresión es la misma simplemente sustituyendo g por a_c:

$$v = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_f)a_c r^2}{\eta} \tag{2.77}$$

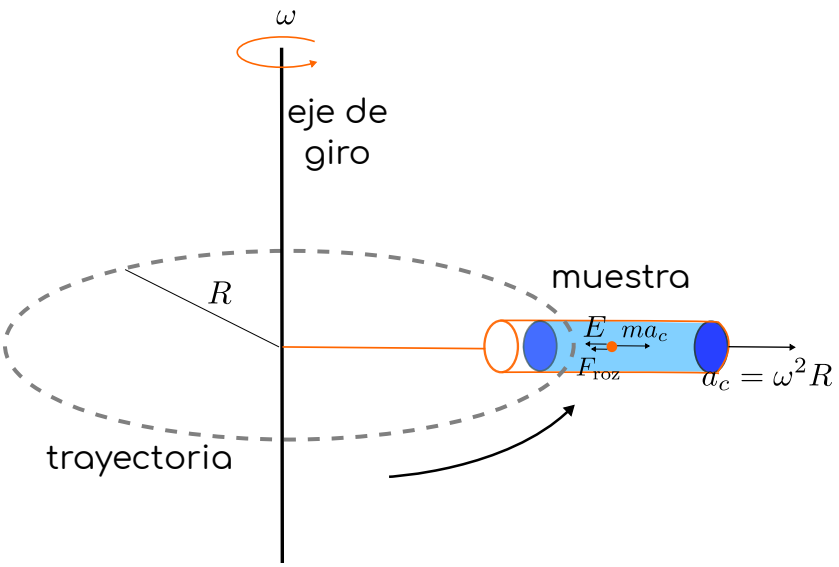


Figura 2.26: Centrifugadora. La muestra gira en una trayectoria circular de radio R a una velocidad angular de ω en radianes por segundo. Desde el punto de vista de la muestra, este movimiento provoca una aceleración centrífuga a_c que desempeña el mismo papel que la aceleración de la gravedad en el caso de sedimentación vertical. Así, el "peso" de la muestra es ma_c en dirección perpendicular a la trayectoria hacia fuera y aparece un empuje $E = \rho_f a_c V$ en la misma dirección y hacia el centro. Como a_c es normalmente muy superior a g podemos despreciar el efecto de la aceleración de la gravedad en sentido vertical.

La aceleración de la centrifugadora a_c se puede dar en referencia a g, como $a_c = 2g$ o $a_c = 3g$, etc... También se puede obtener a partir de la velocidad angular de giro ω (en radianes por segundo): $a_c = \omega^2 R$, con R el radio de giro de la muestra en la centrifugadora. Es frecuente expresar la velocidad de giro de la centrifugadora en r.p.m (revoluciones por minuto). Los detalles se pueden ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15.2 Centrifugadora

Una centrifugadora gira a 6000 rpm. Las muestras giran en un trayectoria circular de 10 cm de radio. Se coloca una muestra con dos proteínas globulares de radios $r_1 = 2\,\text{nm}$ and $r_2 = 5\,\text{nm}$. La densidad de las proteínas es la misma $\rho_p = 1{,}35\,\text{g/cm}^3$. Suponiendo que las proteínas comenzaran en la misma posición, calcule la diferencia en la distancia recorrida por cada una de los tipos de proteínas tras 10 h de centrifugación. Suponga que las proteínas alcanzan la velocidad terminal instantáneamente y que la centrifugación se realiza en agua, de densidad $\rho_a = 1000\,\text{kg/m}^3$ y viscosidad $\eta_a = 0{,}001\,\text{Pa}\cdot\text{s}$.

SOLUCIÓN

Las proteínas alcanzan inmediatamente la velocidad terminal, que es constante. Por tanto, el espacio recorrido por la proteína de radio r_1 en un tiempo t es

$$d_1 = v_1 t = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_a)a_c r_1^2}{\eta_a}t = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_a)\omega^2 R r_1^2}{\eta_a}t \qquad (2.15.2.1)$$

donde hemos utilizado la expresión de la velocidad terminal (2.77) y sustituido el valor de la aceleración angular $a_c = \omega^2 R$. Análogamente, para la proteína de radio r_2 tenemos

$$d_2 = v_2 t = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_a)\omega^2 R r_2^2}{\eta_a}t. \qquad (2.15.2.2)$$

La diferencia de espacio recorrido es:

$$\Delta d = d_2 - d_1 = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_a)\omega^2 R t}{\eta_a}(r_2^2 - r_1^2) \qquad (2.15.2.3)$$

La velocidad angular se tiene que expresar en el SI utilizando 1 vuelta$= 2\pi$ radianes:

$$\omega = 6000\text{rpm} = \frac{6000 \times 2\pi}{60\,\text{s}} \simeq 628/\text{s} \qquad (2.15.2.4)$$

Sustituyendo los valores en el SI tenemos:

$$\Delta d = \frac{2}{9}\frac{((1{,}35 - 1{,}00) \times 10^3 \text{kg/m}^3)(628/\text{s})(10 \times 10^{-2}\,\text{m})(10 \times 3600\,\text{s})((5 \times 10^{-9}\,\text{m})^2 - (2 \times 10^{-9}\,\text{m})^2)}{(1 \times 10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s})} \simeq$$

$$\simeq 2{,}3 \times 10^{-3}\,\text{m} = 2{,}3\,\text{mm} \qquad (2.15.2.5)$$

2.16 *Propiedades de la superficie. Tensión superficial y capilaridad*

Tensión superficial

Hay varias observaciones que indican que la superficie de un líquido se comporta como una especie de membrana elástica estirada bajo tensión. Por un lado, las gotas de agua son esféricas aproximadamente (en ausencia de gravedad) al igual que las pompas de jabón, como sucede con un fluido dentro de una membrana elástica, como puede ser agua o aire dentro de un globo. Otra evidencia la proporcionan objetos más densos que el agua que flotan en su superficie (una aguja, una cuchilla de afeitar, insectos que caminan sobre el agua) pues el agua ha de ejercer alguna fuerza extra que compense el peso, ya que el empuje no es suficiente..

El siguiente experimento (figura 2.27) muestra la tensión superficial y permite medirla. Un alambre que tiene forma de U se cierra completando un rectángulo con otro alambre que puede deslizar. En

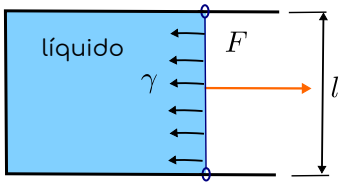


Figura 2.27: Experimento para medir la tensión superficial. Cuando la fuerza F equilibra a la fuerza de la tensión superficial entonces el alambre no se desplaza y la película de agua ni crece ni decrece. Este valor es $F = 2\gamma l$ donde γ es el coeficiente de tensión superficial, el factor 2 se debe a que la película de agua tiene 2 superficies de contacto con el aire y l es la longitud del alambre móvil donde actúan las fuerzas.

el interior del alambre se coloca el líquido formando una película (por ejemplo, agua con jabón). Si no se aplica ninguna fuerza externa sobre el alambre, la película de líquido tiende a decrecer y arrastra el alambre, disminuyendo la superficie de contacto con el aire. Se puede parar el movimiento del alambre si ejercemos una fuerza F en sentido contrario a la de la tensión superficial tal que

$$\gamma = \frac{F}{2l} \tag{2.78}$$

γ es el coeficiente de tensión superficial del líquido en cuestión, que tiene dimensiones de fuerza por unidad de longitud y l es la longitud de contacto del objeto con la superficie del líquido, en este caso, la longitud del alambre. El factor 2 se debe a que en realidad en este experimento con película delgada hay 2 superficies de líquido, la inferior y la superior, como se aprecia en la figura 2.28.

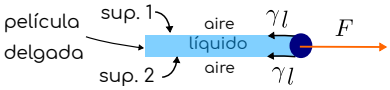


Figura 2.28: El mismo experimento que en la figura 2.27 visto de perfil. Se observa que la película delgada de líquido tiene 2 superficies de contacto con el aire, por lo que la fuerza sobre el alambre debida a la tensión superficial es doble.

Las unidades del coeficiente de tensión superficial son, de 2.78

$$[\gamma] = 1\,\mathrm{N/m} \tag{2.79}$$

La tensión superficial tiene su origen microscópico en una descompensación de las fuerzas atractivas que sufren las moléculas de un líquido cuando están cercanas a la superficie.

Ángulo de contacto y capilaridad

Un efecto de la tensión superficial es la capilaridad, que consiste en el ascenso o descenso del líquido dentro de un tubo de diámetro pequeño. Si el líquido asciende o desciende por un capilar, respecto del nivel del líquido fuera del capilar, está controlado por el ángulo de contacto. El ángulo de contacto es el ángulo que forma la superficie del líquido con la pared sólida, en la región en la que coinciden el líquido, el gas y el sólido. El ángulo se mide por convención desde el sólido atravesando por el líquido, no por el gas, como en la figura 2.29. El ángulo viene determinado por el balance entre las fuerzas de atracción molecular líquido-líquido o líquido-sólido:

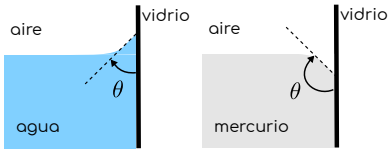


Figura 2.29: El ángulo de contacto es el ángulo que forma la superficie del líquido con la del sólido en la zona de contacto, en la interfase líquido-gas-sólido. Se mide "por dentro" del líquido.

- Atracción sól-líq $>$ atracción líq-líq $\Leftrightarrow \theta < 90°$ (Fig. 2.29 izquierda)
- Atracción sól-líq $<$ atracción líq-líq $\Leftrightarrow \theta > 90°$ (Fig. 2.29 derecha)

Como se ve en la figura 2.29 (izquierda) un ángulo de contacto menor al ángulo recto produce que una pequeña porción de fluido ascienda ligeramente en contacto con el sólido. En el caso de un pequeño tubo, esto resulta en un pequeño menisco que asciende por el tubo capilar, como en la figura 2.30.

Es posible calcular cuánto asciende la columna de líquido por el tubo capilar. La columna sube por efecto de la componente vertical

de la fuerza de tensión superficial. La columna subirá hasta que su peso se equilibre con la fuerza vertical.

Por simplificar la discusión, supongamos que se trata de agua en contacto con vidrio. Pensemos, como en la sección anterior, que la pared de vidrio es un objeto en la superficie del agua. El agua hace una fuerza sobre el objeto que vale[17]

$$F = \gamma l = \gamma 2\pi r \tag{2.80}$$

ya que la longitud total de la línea de contacto de la superficie del agua y el vidrio es $2\pi r$. Al igual que antes, la dirección de la fuerza es tangente a la superficie y sentido hacia el líquido. Por la tercera ley de Newton, igualmente el vidrio hace una fuerza $\gamma 2\pi r$ sobre el agua, pero en sentido contrario (ascendente, la fuerza pintada en azul en la figura 2.30). Esta fuerza del vidrio sobre el agua hace subir el agua. Más concretamente, es la componente vertical de la fuerza[18]

$$F_v = F\cos\theta = \gamma 2\pi r\cos\theta \tag{2.81}$$

donde θ es precisamente el ángulo de contacto.

El agua dejará de ascender, como dijimos, cuando el peso de la columna equilibra dicha fuerza. El peso de una columna de agua de radio r (el mismo del tubo) y de altura h es

$$P = mg = \rho V g = \rho\pi r^2 h g \tag{2.82}$$

con ρ la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad. En equilibrio

$$P = F_v \Rightarrow \rho\pi r^2 h g = \gamma 2\pi r\cos\theta \tag{2.83}$$

de donde podríamos por ejemplo despejar la altura de la columna

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} \tag{2.84}$$

Esta expresión es interesante por al menos un par de cosas

- Se entiende por qué solo se observa el fenómeno bien en tubos de radio muy pequeño (capilares), ya que la altura alcanzada es inversamente proporcional al radio del tubo.
- La expresión es válida también para el descenso por capilaridad si se utiliza el criterio de ángulo de contacto establecido más arriba. Ángulos superiores a 90° dan alturas negativas. Este es el caso del mercurio, aire y vidrio por ejemplo.

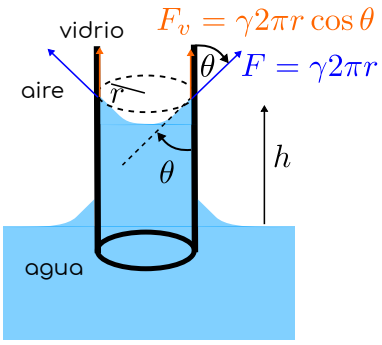


Figura 2.30: Ascenso capilar del agua en un tubo de pequeño radio. El agua sube por la fuerza de tensión superficial hasta que la componente vertical de dicha fuerza se equilibra con el peso de la pequeña columna de agua.

[17] En este caso no aparece el factor 2 en la fuerza de tensión superficial pues no se trata de una película y solo hay una superficie líquido-aire

[18] La componente horizontal se compensa con la reacción perpendicular de la pared.

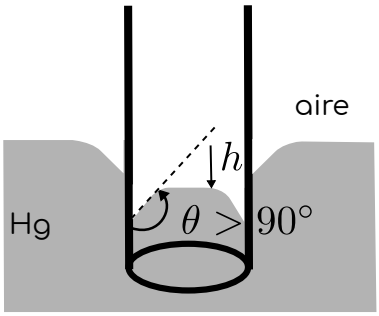


Figura 2.31: Para ángulos de contacto mayores de 90° se produce descenso capilar. Se puede utilizar la misma fórmula del ascenso capilar ya que el coseno de un ángulo mayor a 90° es negativo.

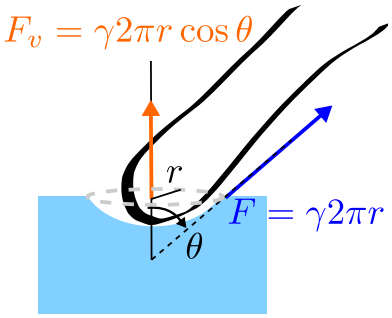


Figura 2.32: Pata de insecto que deforma la superficie del agua, la fuerza debida a la tensión superficial que aparece en consecuencia (en azul) y la componente vertical (en naranja).

Insectos que caminan sobre el agua

Algunos insectos son capaces de mantenerse e incluso desplazarse por la superficie del agua, mantenidos por la tensión superficial. Los

insectos, apoyados por ejemplo en las patas, deforman la superficie del agua haciendo una especie de hoyo o hueco. La superficie del agua, al ser deformada y comportarse elásticamente ejerce una fuerza sobre la pata del insecto. Como hemos visto, esta fuerza es proporcional al coeficiente de tensión superficial. Al igual que en capilaridad, nos interesa la componente vertical, que es la que compensa el peso del insecto, por lo que hay que tener en cuenta el ángulo que forma la superficie del agua con la vertical (ver figura 2.32). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.16.1 Masa de un insecto

Un insecto, del género *Mesovelia*, se encuentra en equilibrio en la superficie del agua. El diámetro de cada una de sus patas es de 60 µm. Suponga que la deformación de la superficie del agua bajo cada pata es aproximadamente de casquete esférico de radio igual al radio de la pata. El ángulo que forma la depresión con la vertical es 60º, como se representa en la figura 2.32. ¿Cuál es la masa más grande que podría tener el insecto? Diga si el resultado es compatible con la masa de uno de estos insectos, del orden de 0,2 mg. Nota: los datos del radio de la pata y la masa de *Mesovelia* se han obtenido de [19], donde además se pueden encontrar asombrosos hechos de este y otros insectos "escaladores de meniscos".

Datos: Aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$; Coeficiente de tensión superficial del agua $\gamma = 0{,}072\,\mathrm{N/m}$.

SOLUCIÓN

En equilibrio el peso del insecto y la componente vertical de la fuerza de tensión superficial son iguales. Teniendo en cuenta que hay 6 patas:

$$mg = 6 \times 2\pi r\gamma \cos 60 \Rightarrow m = \frac{12\pi r \cos 60\gamma}{g} \simeq \frac{12\pi(30\times10^{-6}\,\mathrm{m})(0{,}5)(0{,}072\,\mathrm{N/m})}{(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})} \simeq 4{,}2\times10^{-6}\,\mathrm{kg} = 4{,}2\,\mathrm{mg} \quad (2.16.1.1)$$

Esto es, la fuerza de tensión superficial asociada a las deformaciones del agua provocadas por las patas podría sujetar hasta 4,2 mg. Como el insecto tiene una masa de menos de 1 mg es perfectamente posible que se sujete por la tensión superficial.

[19] David L. Hu and John W. M. Bush. Meniscus-climbing insects. *Nature*, 437(7059):733–736, September 2005

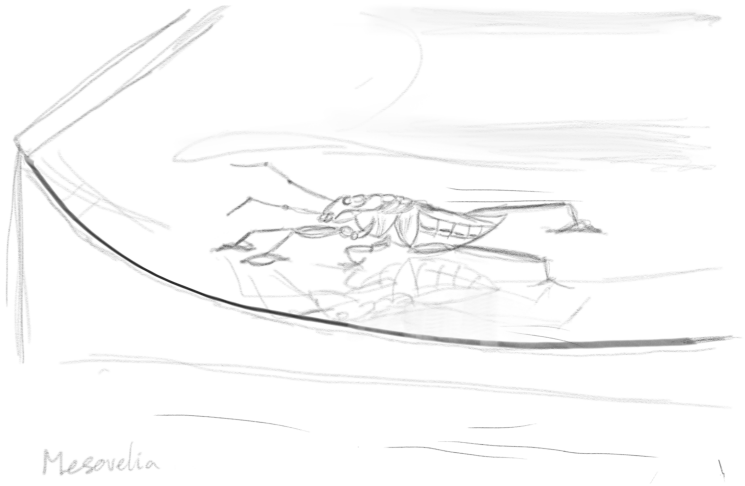


Figura 2.33: Mesovelia escalando un menisco de agua. Dibujo de L.D. inspirado en la figura 1 del artículo de David L. Hu and John W. M. Bush. Meniscus-climbing insects. *Nature*, 437(7059):733–736, September 2005.

3
Termodinámica

3.1 ¿Para qué la termodinámica?

La termodinámica estudia principalmente los flujos de distintas formas de energía (calor, trabajo, energía química,...) en procesos o transformaciones. Ejemplos de relevancia biológica que la termodinámica puede ayudarnos a comprender mejor son el metabolismo (respiración, fotosíntesis,...), el mantenimiento de la temperatura del cuerpo (procesos de transmisión de calor), la difusión de moléculas a través de biomembranas o la espontaneidad de las reacciones químicas.

3.2 Temperatura. Equilibrio térmico.

Todos tenemos una noción intuitiva de la temperatura. Si algo está caliente decimos que tiene una *temperatura alta* y si está frío, que su temperatura es *baja*.[1]

Para una definición más rigurosa de la temperatura T se utiliza el concepto de **equilibrio térmico**. Si ponemos en contacto dos cuerpos de forma que puedan intercambiar calor como en la figura 3.1, tras un tiempo llegarán a un equilibrio y el calor dejará de pasar de uno a otro. En ese momento han alcanzado el *equilibrio térmico* y sus temperaturas serán iguales.

[1] Noción intuitiva: Caliente $\Rightarrow$ T alta, Frío $\Rightarrow$ T baja

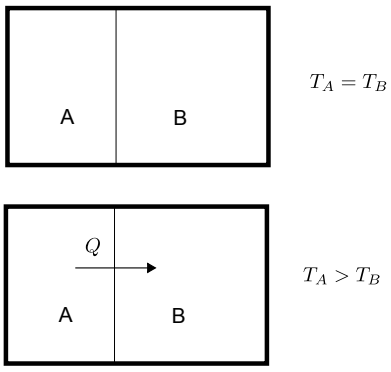


Figura 3.1: Ilustración del equilibrio térmico. Los cuerpos A y B están en contacto a través de una pared que deja pasar el calor.

La Temperatura T mide si los cuerpos están en equilibrio térmico

¿Cómo se mide la temperatura?

Con un **Termómetro**. Un termómetro es básicamente un objeto con alguna propiedad que varía con la temperatura. Éste se pone en contacto con el sistema cuya T queremos medir, de forma que se equilibren sus temperaturas. Midiendo la mencionada propiedad tenemos una medida de la T del sistema. Las propiedades más comunes utilizadas para fabricar termómetros son:

- Tamaño. Casi todos los materiales se expanden al aumentar su T.
- Resistencia eléctrica. La resistencia de metales y semiconductores varía considerablemente con la temperatura. Se usa en los termómetros digitales.
- Color. El color y la cantidad de energía radiada dependen de la temperatura.

Para hacer física necesitamos asignar un número y unas unidades a la magnitud T. Para ello usamos las escalas de temperatura. Usaremos solo dos:

1. **Escala Celsius:** Fija la temperatura de dos puntos, como en el termómetro de la figura 3.2:
   - 0 °C para la temperatura de **fusión** del **agua** a presión de **1 atmósfera**.[2]
   - 100 °C para la temperatura de ebullición del agua a presión de 1 atmósfera.
2. **Escala absoluta o Kelvin.** Se relaciona con la Celsius así: $T(\mathrm{K}) = T(^\circ\mathrm{C}) + 273{,}15$. El "tamaño" del grado es igual en ambas escalas, se diferencian solo en la posición del cero. Esto significa que las diferencias entre 2 temperaturas valen lo mismo en las dos escalas: $\Delta T(\mathrm{K}) = \Delta T(^\circ\mathrm{C})$. El cero de la escala Kelvin se denomina **cero absoluto** y es el límite inferior de temperaturas.

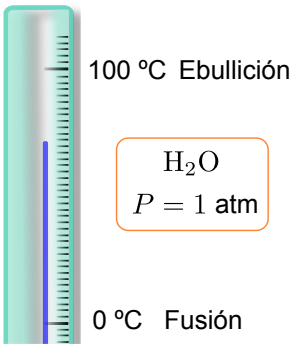


Figura 3.2: Escala Celsius de temperatura. Fija la temperatura de Ebullición y de Fusión del agua a presión atmosférica en 100 °C y 0 °C respectivamente.

[2] Una definición más correcta y moderna fija el punto triple del agua y el cero absoluto. Son definiciones prácticamente equivalentes a temperaturas moderadas y para nosotros lo serán.

3.3 *Gas ideal. Temperatura absoluta.*

Los experimentos de Boyle, Charles, Gay-Lussac con gases a baja presión se pueden resumir utilizando la ecuación de estado de los gases ideales

$$PV = nRT \tag{3.1}$$

que describe la relación entre la presión (absoluta) P, temperatura T (en K, nunca en °C) y volumen V de un gas en equilibrio. Además n es el número de moles de gas[3] y R la llamada *constante de los gases ideales* (tabla 3.1).

Valor	Unidades
8.315	$\mathrm{J/(mol \cdot K)}$
0.0821	$\mathrm{atm \cdot L/(mol \cdot K)}$

Tabla 3.1: La constante R en las unidades más comunes. En negrita en SI.

[3] $n = \frac{N}{N_A}$, N es el número de moléculas y $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ o bien $n = \frac{m}{m_{molecular}}$ con m la cantidad de sustancia en **gramos** y $m_{molecular}$ la masa molecular en gramos también.

El comportamiento de cualquier gas a baja presión es más o menos ideal. Por ejemplo, si a $P =$ cte. miramos cómo cambia el volumen con la temperatura observamos un comportamiento lineal de acuerdo con la ecuación (3.1) y como se muestra en la figura 3.3.

Extrapolando el comportamiento de los gases en la zona donde se transforman en líquido (baja temperatura), se observa que el volumen se hace cero a una determinada temperatura, lo que define

$V = 0$ a $T \approx -273\,^\circ\mathrm{C} \Rightarrow 0$ absoluto de temperaturas

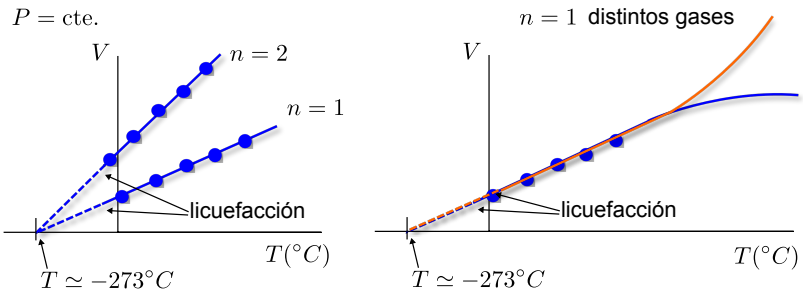


Figura 3.3: Comportamiento del volumen de los gases con la temperatura a presión constante y baja. A la izquierda, 1 mol o 2 moles del mismo gas. A la derecha, 1 mol de dos gases diferentes.

la temperatura más baja que podría tener un gas. A esta temperatura le asignamos por tanto el valor de $T = 0\,\text{K}$ en la escala absoluta.

De la figura también se deduce que la constante de proporcionalidad es la misma para todos los gases una vez fijado el número de moles: R. A veces, en lugar de esta constante, se utiliza la *constante de Boltzmann* k. La relación entre ambas es:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{J/K} \tag{3.2}$$

En función de k, la ecuación de los gases ideales se escribe:

$$PV = nRT \Rightarrow PV = \frac{N}{N_A}RT = NkT \Rightarrow PV = NkT \tag{3.3}$$

donde N es el número de moléculas en el gas y N_A el número de Avogadro.

Ejemplo 3.3.1 **Volumen de 1 mol de gas ideal.**

¿Cuánto ocupa 1 mol de cualquier gas ideal en condiciones estándar de presión y temperatura? **Datos:** $R = 0{,}0821\,\text{atm} \cdot \text{L}/(\text{K} \cdot \text{mol})$

SOLUCIÓN

Las condiciones estándar se definen como

$$\begin{aligned} T &= 0\,^\circ\text{C} = 273\,\text{K} \\ P &= 1\,\text{atm} \end{aligned} \tag{3.3.1.1}$$

Utilizando la ley de los gases ideales tenemos:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{1\,\text{mol} \times 0{,}821\,\text{atm} \cdot \text{L}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \times 273\,\text{K}}{1\,\text{atm}} = 0{,}821 \times 273\text{L} \simeq 22{,}4\,\text{L} \tag{3.3.1.2}$$

En la ecuación de los gases ideales la temperatura siempre va en K.

3.4 *Teoría cinética de los gases. Interpretación microscópica de la T*

Llegaremos a la interpretación microscópica de la T estudiando la presión P que ejerce un gas ideal sobre la pared de su recipiente, desde un punto de vista microscópico.

Cálculo de la presión de un gas sobre la pared de su recipiente

Un gas desde el punto de vista microscópico está compuesto de N moléculas de masa m que se mueven de forma aleatoria con diversas velocidades. Hacemos dos suposiciones adicionales:

- Las moléculas son pequeñas comparadas con la distancia que las separa unas de otras⇒ no interaccionan salvo cuando chocan.
- Los choques entre moléculas y con la pared siguen las leyes de la mecánica y son elásticos.

Calculemos [4] la fuerza que ejerce una molécula de masa m al colisionar con la pared del recipiente con una velocidad v. Por fijar ideas, tomemos la pared de la izquierda marcada en la figura 3.4. Según la segunda ley de Newton:

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.4}$$

Si miramos solo el eje x perpendicular a la pared, en una colisión elástica la velocidad pasa de $-v_x$ a v_x (positivo hacia dentro del recipiente), así:

$$m\Delta v_x = m(v_x - (-v_x)) = 2mv_x \tag{3.5}$$

Si la molécula estuviera sola en la caja, el tiempo entre 2 colisiones sucesivas con la pared de la izquierda sería el tiempo necesario para recorrer 2 veces la longitud l (ida y vuelta) a velocidad v_x:[5]

$$\Delta t = \frac{2l}{v_x} \tag{3.6}$$

que sustituido en la ecuación (3.4), junto con (3.5), da:

$$F = \frac{mv_x^2}{l} \tag{3.7}$$

Este es el resultado si sólo hubiera una partícula en la caja. Para un gas formado por N partículas moviéndose a velocidad v_x, tenemos:

$$F_{\text{total}} = N\frac{mv_x^2}{l} \tag{3.8}$$

[4] D.C. Giancoli. *Física: Principios con aplicaciones*. Prentice Hall Hispanoamérica, México, 1997; and J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988

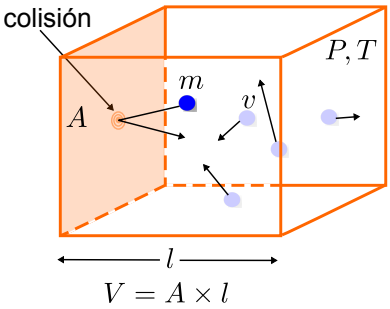


Figura 3.4: Las moléculas golpean sobre las paredes del recipiente, ejerciendo una fuerza y por tanto una presión.

[5] Este resultado da el tiempo medio correcto entre colisiones aunque las partículas sufran colisiones entre sí siempre que éstas sean elásticas.

Obviamente, no todas las partículas se mueven a la misma velocidad v_x. Las velocidades serán diferentes en general. Como las colisiones son muy frecuentes y rápidas, en nuestro mundo macroscópico, la fuerza que se nota sobre la superficie será el promedio a todas las partículas. Promediando[6] se obtiene:

$$\overline{F}_{\text{total}} = N\frac{m\overline{v_x^2}}{l} \tag{3.9}$$

[6] El promedio de cualquier magnitud se obtiene sumando a todos los posibles valores y dividiendo por el número de valores. En el caso de N partículas habrá N posibles valores de la velocidad v_x de modo que $\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_{x,i}^2$

Finalmente, la presión sobre la pared de la caja será:

$$P = \frac{\overline{F}_{\text{total}}}{A} = \frac{mN\overline{v_x^2}}{Al} \tag{3.10}$$

Este resultado depende de la componente x de la velocidad y por tanto parecería que variará según cómo coloquemos los ejes. Podemos buscar un resultado independiente de componentes:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{3.11}$$

donde v es el módulo del vector velocidad de las partículas. Como las velocidades son aleatorias y no hay preferencia por ninguna dirección[7]:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \Rightarrow \overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} \tag{3.12}$$

[7] Si no fuera así, ¡el gas se movería como un todo!

De modo que podemos escribir la presión (ecuación (3.10)) como:

$$P = \frac{mN\overline{v_x^2}}{Al} = \frac{mN\overline{v^2}}{3Al} \tag{3.13}$$

que reordenando y teniendo en cuenta que el volumen de la caja es $V = Al$ (ver figura 3.4) da lugar a:

$$PV = \frac{2}{3}N(\frac{1}{2}m\overline{v^2}) \tag{3.14}$$

El término entre paréntesis es la **Energía Cinética media** $\overline{E_c}$ de las partículas del gas. Comparando la ecuación (3.14) con la expresión macroscópica de la ley del gas ideal[8] (3.3) $PV = NkT$ obtenemos el resultado fundamental:

$$\frac{2}{3}N\frac{1}{2}m\overline{v^2} = NkT \Rightarrow \overline{E_c} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \tag{3.15}$$

[8] Puede parecer extraño comparar la presión del gas de la fórmula del gas ideal con la presión que ejerce sobre una sola de las caras. Sin embargo, en un gas en equilibrio, la presión sobre cualquier cara será la misma y será la presión en cualquier punto del gas (despreciando efectos de la gravedad)

La energía cinética media de las partículas es proporcional a la temperatura absoluta T. O bien, la temperatura absoluta es una medida de la energía cinética media de las partículas en el gas. A mayor temperatura, mayor movimiento molecular y viceversa:

- Mayor $T \Leftrightarrow$ mayor movimiento (más energía cinética)

- kT nos da el orden de magnitud de la energía asociada al movimiento aleatorio de las partículas de una sustancia a T y está disponible para realizar algún proceso (reacción química, transición...)

Por último, la energía cinética total (suma de todas la E_c de todas las partículas) será N veces la media

$$E_c = N\overline{E_c} = \frac{3}{2}NkT \text{ o bien } E_c = \frac{3}{2}nRT \tag{3.16}$$

resultado [9] que utilizaremos más adelante al tratar el primer principio.

[9] Para la forma $\frac{3}{2}nRT$ véanse las ecuaciones (3.2) y (3.3)

3.5 *Distribución de velocidades de Maxwell*

En un gas no todas las partículas tienen la misma velocidad. Las partículas se distribuyen en velocidades según la *Distribución de Maxwell* que tiene el aspecto representado en la figura 3.5

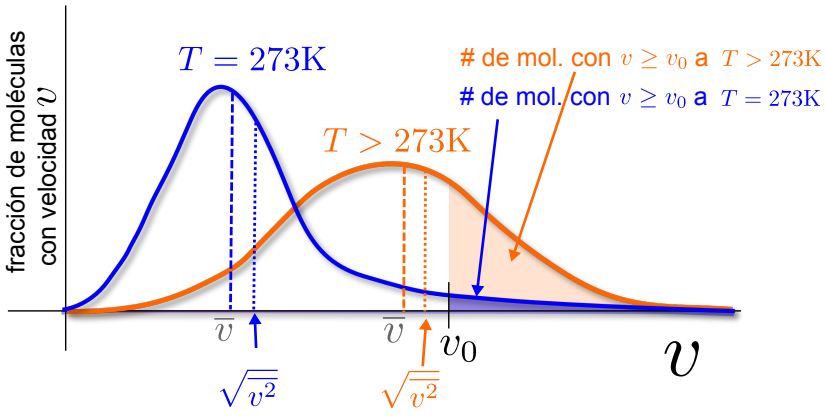


Figura 3.5: Distribución de velocidades en un gas en equilibrio a una temperatura de $T = 273\,\text{K}$ en azul y a una temperatura mayor en naranja. Las líneas discontinuas marcan la velocidad media $\overline{v}$ y las punteadas la velocidad "cuadrática media" $\sqrt{\overline{v^2}}$. El área de las regiones sombreadas es proporcional al número de partículas que encontraríamos en el gas cuya velocidad v es mayor que una cierta velocidad v_0 dada. De la figura es claro que este número es mayor en el gas a mayor temperatura.

3.6 *Visión microscópica de algunos fenómenos de relevancia biológica*

La teoría cinética y la distribución de velocidades de Maxwell nos permiten explicar al menos cualitativamente varios fenómenos como la difusión, la presión osmótica, la evaporación y su dependencia con la temperatura. Para ello basta con tener presente la idea de que las partículas en una sustancia se mueven más o menos **aleatoriamente** y con mayor **energía** cuanto mayor es la **temperatura**.

Difusión

Las partículas en disolución en un fluido tienden a difundirse hacia zonas de menor concentración. Consideremos el tubo de la figura 3.6 en la que hemos sombreado un área correspondiente a la sección transversal. La concentración es mayor en el lado izquierdo de la sección. Si las partículas se mueven más o menos aleatoriamente, por puro azar cruzarán más partículas de izquierda a derecha que al revés, por lo que habrá un flujo neto de partículas de la zona más concentrada a la de menor concentración.

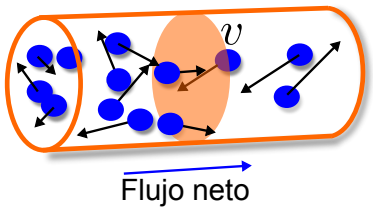


Figura 3.6: Las partículas a una cierta T se mueven al azar y tienden espontáneamente a difundirse de las zonas más concentradas a las de menor concentración.

Opcional.
En la difusión el flujo de partículas es proporcional al gradiente de concentración, según la ley de Fick:

$$J = DA\frac{c_1 - c_2}{L} \tag{3.17}$$

donde J es el flujo de masa, c_1 y c_2 son las concentraciones diferentes que generan el flujo, L es la separación entre las dos zonas de diferente concentración, A el área de la sección transversal a través de la cuál circulan las partículas, y D el coeficiente de difusión.

Magnitud	Unidades
J	kg/s o mol/s
c_1 y c_2	kg/m^3 o mol/m^3
A	m^2
L	m
D	m^2/s

Evaporación

Para que algunas partículas cercanas a la superficie escapen de un líquido y pasen a fase vapor necesitan tener la suficiente energía cinética como para vencer la atracción del resto de moléculas del líquido. Imaginemos que solo las partículas con velocidad mayor que una cierta velocidad v_0 pueden escapar y permanecer en la fase vapor. Si miramos a la figura de la distribución de Maxwell 3.5 es claro que la evaporación:

- **Aumenta con la** T. A mayor T más partículas tienen la velocidad (energía) suficiente para escapar.
- **Produce enfriamiento**. Escapan las moléculas más veloces y se llevan la E_c con ellas $\Rightarrow$ desciende el promedio $\overline{v^2}$ y por tanto la temperatura. Es un mecanismo de enfriamiento habitual.

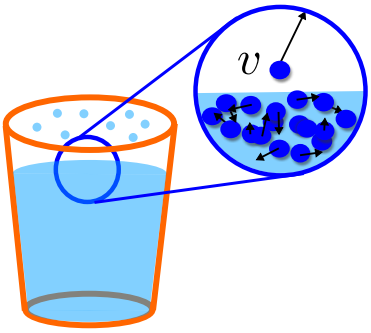


Figura 3.7: Sólo las partículas con suficiente velocidad escapan de la fase líquida y pasan a la fase vapor.

Presión osmótica

La *ósmosis* aparece en presencia de **membranas semipermeables**. Las membranas semipermeables dejan pasar típicamente el solvente y no el soluto. Por claridad tomemos el ejemplo de **agua y sal**: supongamos dos partes de un recipiente a la misma presión y temperatura

separadas por una membrana permeable al agua pero no a la sal, como en la figura 3.8.

Disolvemos sal en una de las dos cámaras. En la cámara con agua y sal (que llamaremos interior), por la presencia de las moléculas de sal, el agua se encuentra en menor concentración respecto de la cámara donde está pura (que llamaremos exterior). Por *difusión*, el agua tenderá a fluir hacia la zona donde se ha disuelto la sal. Este flujo osmótico puede detenerse por ejemplo debido a un aumento de presión en la cámara donde está la disolución[10] como en la figura 3.9: la **presión** adicional necesaria para **detener el flujo** de solvente por ósmosis se denomina **presión osmótica** π.

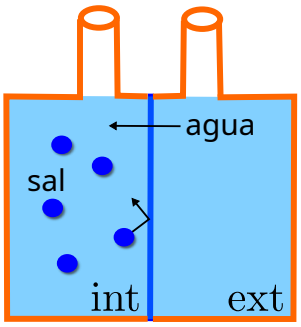


Figura 3.8: Inicialmente las dos cámaras están a igual presión y temperatura. La membrana semipermeable deja pasar el agua (solvente) pero no la sal (soluto). Por difusión del *agua*, esta comienza a pasar hacia la zona de alta concentración de *sal*.

[10] El aumento de presión puede tener diferentes orígenes, por ejemplo, por resistencia de las paredes a la expansión producida por el flujo de agua, como en un eritrocito. El flujo de agua podría provocar una diferencia de alturas que conlleva un aumento de presión de valor ρgh. También puede deberse a un agente externo que aplica una presión, como en un recipiente con un pistón

Se puede calcular la presión osmótica suponiendo que

- De la definición, en el equilibrio, para detener el flujo, en el interior la presión es superior en π, la presión osmótica, a la presión exterior: $P_{\text{int}} = P_{\text{ext}} + \pi$.
- La presión en la cámara con disolución es la suma de la presión que haría el agua pura y la responsable del soluto: $P_{\text{int}} = P_{\text{agua}} + P_{\text{soluto}} \Rightarrow \pi + P_{\text{ext}} = P_{\text{agua}} + P_{\text{soluto}}$
- La presión que tendría el agua pura, es igual a la presión de la cámara donde efectivamente está pura, pues inicialmente estaban a misma presión y temperatura, $P_{\text{agua}} = P_{\text{ext}} \Rightarrow \pi = P_{\text{soluto}}$

Por otro lado,

- si la disolución es poco concentrada, las partículas del soluto se comportan como partículas de un gas ideal y entonces

$$\pi = P_{\text{soluto}} = \frac{n}{V} RT \tag{3.18}$$

donde n es el número de moles de soluto, V el volumen de la disolución, R la constante de los gases ideales y T la temperatura en Kelvin. Como la concentración de la disolución es $c = \frac{n}{V}$, entonces

$$\pi = cRT \tag{3.19}$$

Esta fórmula nos permite calcular presiones, como en el ejemplo[11] siguiente.

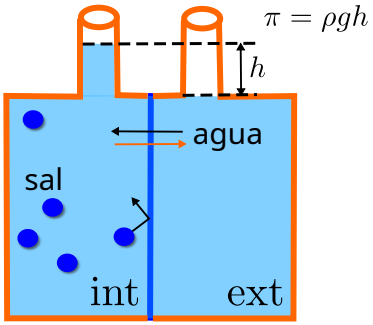


Figura 3.9: Situación de equilibrio. La presión adicional provoca un flujo de agua (flecha naranja) que compensa exactamente el flujo por ósmosis (flecha **negra**) de modo que el flujo neto es **nulo**.

[11] Adaptado de J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988

Ejemplo 3.6.1 **Ascenso por ósmosis. Disolución de sacarosa en agua.**

Consideremos un tubo con una disolución de sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$) en agua al 1 % en masa en contacto con un depósito de agua pura a través de una membrana semipermeable. La temperatura es de 27 °C y la densidad del agua $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\text{kg/m}^3$. ¿Cuánto ascenderá la columna de agua debido al efecto de la ósmosis?

SOLUCIÓN

La columna subirá hasta una altura h tal que la presión adicional equilibre la presión osmótica:

$$\pi = cRT = \rho gh \Rightarrow h = \frac{cRT}{\rho_{agua} g} \tag{3.6.1.1}$$

donde además hemos supuesto que la densidad de la disolución ρ no cambia mucho respecto de la del agua $\rho \simeq \rho_{\text{agua}}$. Necesitamos por tanto calcular la concentración en un volumen mol/m^3 de la disolución. Primero calculamos la masa de agua en un volumen $V = 1\,\text{m}^3$. Usando la densidad

$$m = \rho V \simeq \rho_{\text{agua}} \times 1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{kg} \tag{3.6.1.2}$$

La masa de sacarosa por cada m^3, correspondiente al 1 % será entonces de

$$m_{\text{sacarosa}} = 0{,}01 \times m = 10\,\text{kg} = 10^4\text{g} \Rightarrow c = 10^4\text{g}/\text{m}^3 \tag{3.6.1.3}$$

Para pasar a mol/m^3 necesitamos calcular la masa de 1 mol de sacarosa:

$$M_{\text{sacarosa}} = 12 \times 12\,\text{g}/\text{mol} + 22 \times 1\,\text{g}/\text{mol} + 11 \times 16\,\text{g}/\text{mol} = 342\,\text{g}/\text{mol} \tag{3.6.1.4}$$

La concentración será

$$c = \frac{m_{\text{sacarosa}}}{V M_{\text{sacarosa}}} = \frac{10^4\text{g}/\text{m}^3}{342\,\text{g}/\text{mol}} \simeq 29{,}2\,\text{mol}/\text{m}^3 \tag{3.6.1.5}$$

Finalmente, tomando $T = 27\,^\circ\text{C} + 273 = 300\,\text{K}$, sustituyendo la concentración en (3.6.1.1):

$$h = \frac{cRT}{\rho_{agua} g} = \frac{29{,}2\,\text{mol}/\text{m}^3 \times 8{,}3\,\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K}) \times 300\,\text{K}}{1000\,\text{kg}/\text{m}^3 \times 9{,}8\,\text{m}/\text{s}^2} \simeq 7{,}4\,\text{m} \tag{3.6.1.6}$$

3.7 *Calor, ¿qué es?*

Cuando ponemos en contacto dos cuerpos a distinta temperatura, el cuerpo a mayor temperatura cede *calor* al más frío, de forma que en general este último **aumenta su temperatura** (ver figura 3.10). El mismo incremento de temperatura ΔT se puede conseguir a partir de diferentes tipos de **energía**, como *energía mecánica* en el experimento original de Joule, o *energía eléctrica*. Estos experimentos llevaron a concluir que el calor es una forma de energía.

Por ejemplo, la energía (en J) cedida por una resistencia eléctrica de valor R (en Ω) cuando circula una intensidad de I (en A) durante un tiempo t (en s) es:

$$E = I^2 R t \tag{3.20}$$

Si se cede a 1 g de agua un calor de 1 cal se consigue aumentar su temperatura en 1 °C[12]. Ese mismo aumento de 1 °C se consigue transfiriendo 4,18 J de energía eléctrica (o mecánica). Así, se establece el *equivalente mecánico* del calor en:

$$1\,\text{cal} = 4{,}18\,\text{J} \tag{3.21}$$

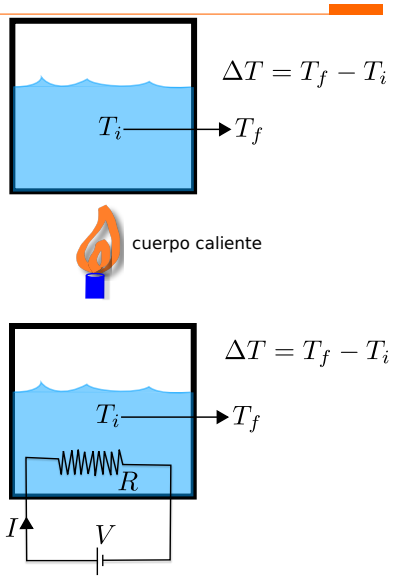


Figura 3.10: Dos formas de calentar agua: acercando un cuerpo más caliente como una llama (**arriba**) o cediendo energía eléctrica a través de una resistencia (**abajo**).

[12] La definición de caloría se establece para el aumento de 1 °C desde 14,5 °C a 15,5 °C a presión de 1 atm. Sin embargo, nosotros supondremos que es equivalente a cualquier temperatura inicial.

Explicación según la teoría cinética

Ponemos en contacto dos gases a *distinta* T. Las partículas se mueven al azar y comienzan a **chocar**. Cuando una partícula veloz choca con una partícula lenta le cede parte de su energía cinética. Así se va **transmitiendo** en general **energía** cinética de las partículas veloces (del gas caliente) a las inicialmente lentas del gas frío. El gas caliente pierde energía cinética en promedio (se enfría) y el frío la gana (se calienta). Esa transferencia de energía es lo que conocemos como **calor** transferido.

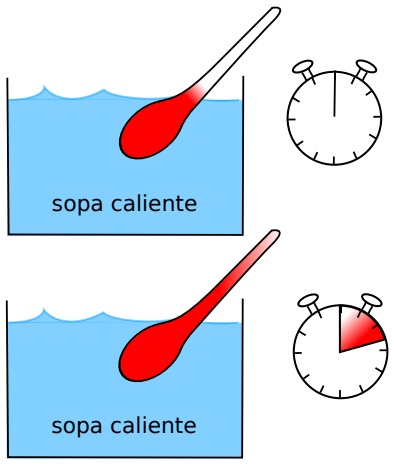


Figura 3.11: Se ha transferido E de la parte en contacto con la sopa hasta la parte lejana de la cuchara, a través del material de la cuchara.

3.8 Transmisión de Calor

Vamos a ver 4 mecanismos para la pérdida de energía en forma de calor. En un proceso de pérdida de calor, por ejemplo un animal en un ambiente más frío que su temperatura, se pueden dar los 4 en mayor o menor medida. Tradicionalmente los mecanismos de transmisión de calor son 3: **conducción**, **convección** y **radiación**. Consideraremos aquí el efecto de la **evaporación** por separado[13].

[13] Normalmente se considera un mecanismo de transferencia de calor (y masa) por convección.

Conducción

Es la transmisión del calor (energía cinética de las partículas) **a través de un medio material**. Un ejemplo común es el representado en la figura 3.11. Microscópicamente, el calor se conduce debido a las colisiones o transmisión de la vibración de unos átomos a otros:

- En fluidos: colisiones entre átomos o moléculas
- En metales: principalmente por los e^- libres colisionando con los átomos en la red cristalina
- En otros materiales: vibraciones de la red que se propagan, como en la figura 3.12.

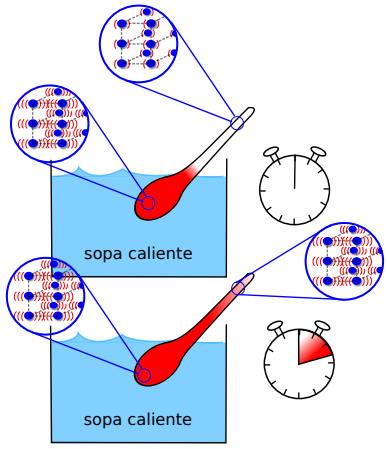


Figura 3.12: Visión microscópica de la transmisión del calor: la energía cinética de vibración (proporcional a la T) se transmite a través de la red cristalina de los átomos del material.

y sólo si hay diferencia de T. De hecho, el flujo de calor[14] a través de un material es proporcional al gradiente de T. De esta forma, el ritmo al que se transmite el calor en una situación como la de la figura 3.13 es:

$$\dot{Q} = kA\frac{T_2 - T_1}{l} \tag{3.22}$$

con

- $\dot{Q}$:ritmo de transmisión de calor, potencia, o cantidad de energía por unidad de tiempo transmitidos, en W

[14] El flujo de calor $\dot{q}$ es el ritmo al que se transfiere calor a través de una superficie por unidad de área de esa superficie $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$

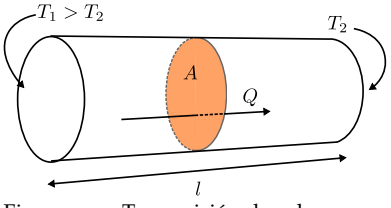


Figura 3.13: Transmisión de calor a través de un cilindro con los extremos a diferente temperatura

- A : área de la sección transversal a través de la que se transmite el calor
- $T_2 - T_1$: diferencia de temperaturas entre los puntos o zonas entre los que se transmite el calor
- l : Separación entre los puntos a temperatura T_1 y T_2
- k : conductividad térmica del material.

La k mide cómo de rápida es la transmisión de calor a través de un material por unidad de longitud y grado. Sus unidades son:

$$k = \frac{\dot{Q} l}{A(T_2 - T1)} \Rightarrow [k] = \frac{\mathrm{J \cdot m}}{\mathrm{s \cdot m^2 \cdot K}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}} \tag{3.23}$$

Es por ejemplo responsable de la sensación térmica distinta al tocar dos materiales diferentes (metal y madera) aunque estén a la misma T (figura3.14). Si

- $k \uparrow\uparrow \Rightarrow$ buen conductor térmico (metales en general)
- $k \downarrow\downarrow \Rightarrow$ mal conductor térmico o aislante: (aire, poliespan, madera,...)

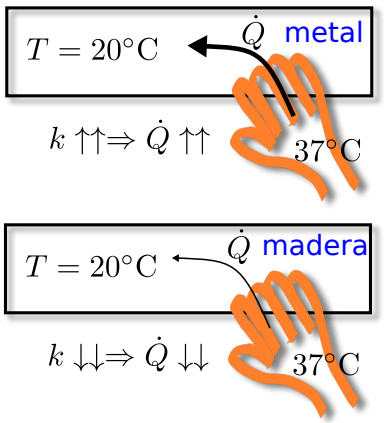


Figura 3.14: Al tocar un material con conductividad alta (como metal), la mano se enfría rápidamente, provocando mayor sensación de frío que cuando se toca uno bastante aislante (como madera).

Ejemplo 3.8.1 Ritmo metabólico

Para mantener constante una temperatura de 30 °C en una colonia de bacterias debemos suministrar[15] 30 W de potencia calefactora con una lámpara. La temperatura ambiente es de 15 °C. Las bacterias están en un recipiente de vidrio de conductividad $k = 0{,}2\,\mathrm{cal/(s \cdot m \cdot °C)}$, área $20\,\mathrm{cm^2}$. El grosor del vidrio es de 0,5 mm. ¿Cuál es el ritmo metabólico de la colonia (energía producida por las bacterias por unidad de tiempo)?

[15] Ejemplo adaptado de D. Jou, J.E. Llebot, and C. Pérez García. *Física para ciencias de la vida*. Mc Graw-Hill interamericana de España, Madrid, 1994

SOLUCIÓN

La cantidad de calor que pierde la colonia por conducción a través del vidrio es

$$\dot{Q} = kA\frac{T_c - T_{\mathrm{amb}}}{l} = \frac{0{,}2 \times 4{,}18 \times (30-15)\,\mathrm{J \cdot \cancel{m^2} \cdot \cancel{K}}}{0{,}5 \times 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m^2}} \cdot \mathrm{s} \cdot \cancel{\mathrm{K}}} \simeq 50{,}2\,\mathrm{W} \tag{3.24}$$

$$k = 0{,}2\,\mathrm{cal/(s \cdot m \cdot K)} = 0{,}2 \times 4{,}18\,\mathrm{J/(s \cdot m \cdot K)} \tag{3.25}$$

Para que se mantenga constante la temperatura de la colonia, la potencia que se pierde ha de igualar a la que se suministra con la lámpara más la que generan las propias bacterias. La lámpara proporciona sólo 30 W de modo que el resto ha de ser lo que generan las bacterias con su metabolismo:

$$RM = (50{,}2 - 30)\mathrm{W} = 20{,}2\,\mathrm{W}. \tag{3.26}$$

Convección

Los **fluidos** suelen tener **bajas** k, conductividades térmicas. Sin embargo pueden transmitir el calor rápidamente por medio de la convección: proceso mediante el que **se transfiere calor** debido al **movimiento** de una cierta cantidad de masa. Puede ocurrir por ejemplo **espontáneamente** al calentar un fluido desde abajo y se denomina **convección natural** (ver figura 3.15).

Cuando el movimiento es asistido por una bomba o ventilador por ejemplo, se habla de **convección forzada**. Ejemplos de convección forzada son el calor perdido a través de la ventilación en los pulmones, donde el aire entra en general frío y sale más caliente o el calor transportado por la sangre en la circulación.

De toda la energía consumida en forma de alimentos, en torno al 80 % se desprende en forma de calor. La conductividad térmica del tejido biológico es bastante baja[16] por lo que son necesarios otros mecanismos para evacuar el calor. La sangre se calienta al pasar por las partes más internas del cuerpo y se desplaza hasta las zonas más superficiales del cuerpo, como los capilares debajo de la piel, donde el calor se puede perder por conducción más eficientemente al atravesar un menor espesor, por radiación o por evaporación (figura 3.16).

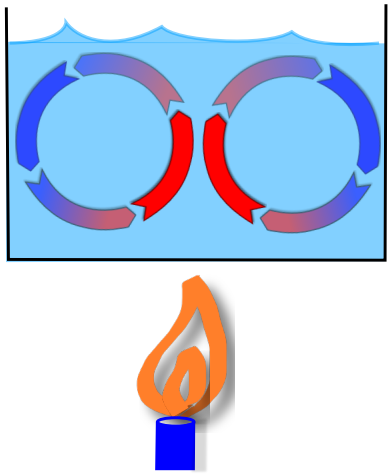


Figura 3.15: **Corrientes de convección**. El agua más caliente de abajo se expande, disminuyendo su densidad, por lo que tiende a flotar. El agua más fría y densa tiende a ocupar la zona del fondo. El movimiento da lugar a las celdas de convección.

[16] ($< 1\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$), similar a la del agua

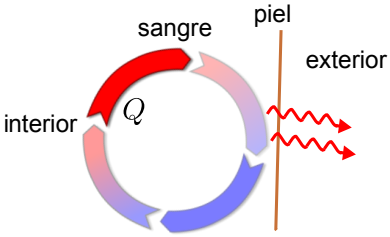


Figura 3.16: **Convección forzada** El corazón bombea la sangre desde el interior del cuerpo a zonas superficiales donde se enfría por conducción a través de un espesor de tejido menor, por radiación o evaporación.

Radiación

Hemos visto hasta ahora mecanismos de transporte de energía térmica a través de la materia. Sin embargo, ¿cómo llega el calor del Sol a la Tierra a través del vacío? Llega en forma de radiación electromagnética. Los objetos a temperatura habitual en la Tierra radían sobre todo en el infrarrojo, por lo que es la radiación **infrarroja** la que se denomina **radiación térmica**. Cualquier cuerpo a $T > 0\,\mathrm{K}$ necesariamente emite energía en forma de radiación. El ritmo al que se emite energía (calor) es

$$\dot{Q} = e\sigma A T^4 \tag{3.27}$$

donde $\dot{Q}$ es el ritmo de transmisión de calor o potencia radiada en W, e la emisividad característica del material y de su superficie:

- $0 < e < 1$.
- $e \approx 1$ para un cuerpo negro $e \ll 1$ para cuerpos blancos y superficies pulidas[17].

$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$ es la constante de Stefan-Boltzmann y T la temperatura del objeto **en Kelvin** y A el área del cuerpo a través de la cuál se radia la energía.

[17] En realidad, para temperaturas moderadas, lo más importante es la emisividad en el infrarrojo, no en el visible, de modo que el color en el visible es solo ligeramente indicativo de la emisividad del cuerpo. Por otro lado, un "cuerpo negro" tiene una definición concreta en física como emisor y absorbedor perfecto en toda longitud de onda, en la que no vamos a entrar en este curso

Balance de energía por radiación. Si la energía radiada $\dot{Q} \propto T^4$, ¿los cuerpos se enfrían hasta perder toda su energía y quedar a $T = 0$? No, también absorben energía. Considérese una persona a T_1 en una habitación a $T_2 < T_1$. El ambiente emite energía de forma proporcional a T_2^4, que es absorbida por el cuerpo. El balance neto de energía para la persona es:

$$\dot{Q}_{\text{neto}} = \dot{Q}_{\text{emitido}} - \dot{Q}_{\text{absorbido}} = e\sigma A T_1^4 - \alpha\sigma A T_2^4 \tag{3.28}$$

donde α es el coeficiente o poder de absorción (fracción de energía absorbida). Para un cuerpo general tanto la emisividad e como el coeficiente de absorción α dependen de la temperatura o de la longitud de onda de la radiación considerada. Aquí solo consideraremos cuerpos llamados "grises" donde tanto α como e son constantes. Entonces, la ley de Kirchhoff[18] dice que $\alpha = e$ por lo que el balance neto es

$$\dot{Q}_{\text{neto}} = e\sigma A(T_1^4 - T_2^4) \tag{3.29}$$

La igualdad $\alpha = e$ se deduce al imponer que si un cuerpo alcanza el equilibrio con un cuerpo negro (emisor perfecto) a una cierta temperatura, entonces el flujo de calor entre ambos debe anularse. Para que esto pueda ocurrir a una temperatura cualquiera, la única solución es que $\alpha = e$.

[18] Cuando la emisividad y el poder de absorción dependen (fuertemente) de la longitud de onda o de la temperatura de emisión, se puede establecer la ley de Kirchhoff para una determinada longitud de onda $\epsilon(\lambda) = \alpha(\lambda)$ o para una determinada temperatura de emisión. Si un cuerpo de estas características (superficies selectivas) recibe y emite radiación térmica en longitudes de onda muy dispares, lo habitual es utilizar (3.28) pero con la emisividad y coeficiente de absorción a las longitudes de onda adecuadas para establecer el balance.

Ejemplo 3.8.2 Flujo neto

Calcular el flujo neto de energía que pierde un ser humano desnudo en una habitación a 25 °C. Tome $e = 0{,}75$ para la piel humana, un área superficial de $1{,}5\,\text{m}^2$ y una temperatura de la piel de $T_{\text{piel}} = 33\,°\text{C}$.

SOLUCIÓN

$$\dot{Q}_{\text{neto}} = e\sigma A(T_1^4 - T_2^4) = 0{,}75 \times 5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4) \times 1{,}5\,\text{m}^2 \left[(33+273)^4 - (25+273)^4\right] \text{K}^4 \simeq 56\,\text{W} \tag{3.8.2.1}$$

Opcional. Ley de desplazamiento de Wien

El máximo de la emisión de un cuerpo negro se da a una determinada longitud de onda que depende de la temperatura, según la **ley de desplazamiento de Wien**:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}, \text{ donde } b = 2{,}9 \times 10^{-3}\,\text{m/K} \tag{3.30}$$

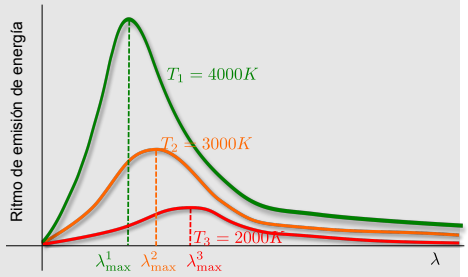


Figura 3.17: La longitud de onda del máximo de emisión se desplaza hacia longitudes de onda cortas al aumentar la temperatura.

Evaporación

Cuando se evapora una cantidad m de agua, esta absorbe un calor:

$$Q = ml_{\text{evap}} \tag{3.31}$$

donde l_{evap} es el calor latente de evaporación del agua, esto es, la cantidad de energía necesaria para evaporar 1 kg de agua, $l_{\text{evap}} = 2260 \times 10^3\,\text{J/kg}$. ¿A qué ritmo pierde calor el cuerpo por evaporación?

$$\dot{Q} = \dot{m}l_{\text{evap}} \tag{3.32}$$

donde $\dot{m}$ es el ritmo al que se evapora el agua en kg/s.

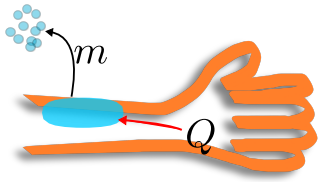


Figura 3.18: Enfriamiento por evaporación. El cuerpo cede calor al sudor, provocando la evaporación del agua.

3.9 Calorimetría

Calor específico de sólidos y líquidos.

El calor que es necesario transferir a, o extraer de, un cuerpo[19] de masa m para variar su temperatura es

$$Q = mc\Delta T \tag{3.33}$$

donde

- $\Delta T = T_f - T_i$ es la diferencia entre la temperatura final T_f y la inicial T_i. Si siempre se utiliza final menos inicial tenemos que:

  $T_f > T_i \Rightarrow \Delta T > 0 \Rightarrow Q > 0$ (el cuerpo *absorbe* calor)
  $T_f < T_i \Rightarrow \Delta T < 0 \Rightarrow Q < 0$ (el cuerpo *cede* calor)

- c, calor específico, es característico del material. Es el calor necesario para aumentar la temperatur de 1 kg del material 1 K o **equivalentemente** 1 °C. Sus unidades son, por tanto:

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \Rightarrow [C] = \frac{\text{J}}{\text{kgK}} = \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \tag{3.34}$$

De la definición anterior de caloría (ver ecuación (3.21)) sabemos que el calor específico del agua es

$$c_{H_2O} = 1\,\text{cal/g/°C} = 4{,}18 \times 10^3\,\text{J/(kg} \cdot \text{°C)} \tag{3.35}$$

Calor latente

Al estudiar la evaporación, hemos visto que es necesario proporcionar calor a una sustancia para que pase de estado líquido a gas. En realidad esto ocurre en cualquier cambio de fase y el calor se denomina calor latente[20]. Veamos algunas características más de los

[19] Sólido o líquido, gases por ahora no

[20] La denominación entalpía de cambio de fase es más correcta, pero aún no hemos explicado la entalpía

cambios de fase.

Cuando una sustancia cambia de fase (de sólido a líquido o de líquido a gas, por ejemplo) la temperatura permanece constante mientras coexisten las 2 fases aunque haya aporte o cesión de calor. Por ejemplo, el calor aportado a un bloque de hielo a su temperatura de fusión (0 °C a 1 atm) se emplea totalmente en producir el cambio de fase, como en la figura 3.19.

El calor latente l de fusión, evaporación, sublimación, etc... es el calor necesario para fundir, evaporar, sublimar, etc... completamente 1 kg de una determinada sustancia. De modo que para una cantidad m de sustancia, el calor necesario será

$$Q = ml \tag{3.36}$$

Por convención, los calores latentes se dan siempre como positivos, como en la tabla 3.3 para el agua. Sin embargo, el signo de Q será positivo si el cuerpo absorbe calor en el proceso y negativo si el cuerpo lo cede. Si en un cambio de fase (fusión de sólido a líquido por ejemplo) se absorbe un calor $Q = ml_{\text{fusión}}$, en el proceso inverso (solidificación) el cuerpo cede $Q = -ml_{\text{fusión}}$. De este modo, para los cambios de fase, hay que establecer el signo correcto para el calor "a mano". En la tabla 3.2 se listan los distintos cambios de fase.

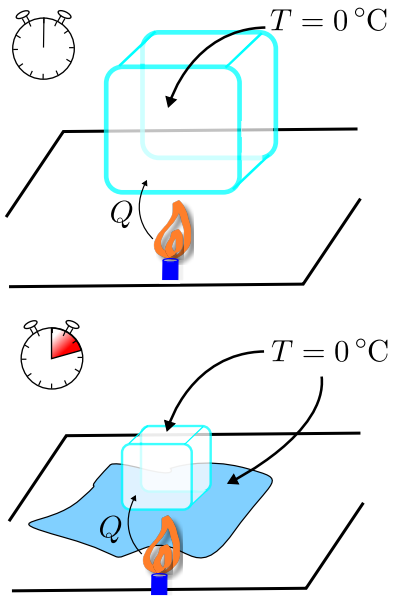


Figura 3.19: **Cambio de fase.** Mientras hay coexistencia de fases (hielo + agua, en este caso) su temperatura permanece igual a la temperatura del cambio de fase. Todo el calor aportado se emplea en convertir el agua sólida en líquida. Una vez se funde completamente, el calor aportado producirá aumento de temperatura.

Cambio de fase	Nombre	Q
sólido→ líquido	fusión	$ml_{\text{fusión}}$
líquido → sólido	solidificación	$-ml_{\text{fusión}}$
líquido→ gas	evaporación o ebullición	ml_{evap}
gas → líquido	condensación	$-ml_{\text{evap}}$
sólido→ gas	sublimación	ml_{sublim}
gas → sólido	sublimación inversa	$-ml_{\text{sublim}}$

Tabla 3.2: Cambios de fase comunes y calor intercambiado por una cantidad m de sustancia al verificarlos, con indicación del signo.

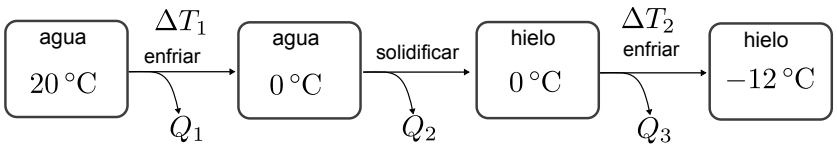
Cambio	l(kJ/mol)
fusión	6.01
ebullición	40.7
sublimación	46.7

Tabla 3.3: Valores de calores latentes de cambio de estado para el agua.

Ejemplo 3.9.1 **Calor intercambiado en un proceso con cambio de fase**

¿Cuánta energía debe extraer un refrigerador de 1,5 kg de agua a 20 °C para hacer cubitos de hielo a −12 °C? **Datos:** Los calores específicos del agua y del hielo son $c_{H_2O} = 4{,}18 \times 10^3\,\text{J/(kg}\cdot\text{°C)}$ y $c_{\text{hielo}} = 2100\,\text{J/(kg}\cdot\text{°C)}$ respectivamente. El calor latente de fusión del agua es $333 \times 10^3\,\text{J/kg}$.

SOLUCIÓN



Los calores de los distintos procesos son, según lo indicado en la figura:

$$\begin{aligned} Q_1 &= mc_{H_2O}\Delta T_1 \\ Q_2 &= -ml_{\text{fusion}} \\ Q_3 &= mc_{\text{hielo}}\Delta T_2 \end{aligned} \tag{3.9.1.1}$$

De modo que el calor total extraído del agua (cedido por el agua) será:

$$\begin{aligned} Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1{,}5\,\text{kg} \times 4{,}18 \times 10^3\,\text{J}/(\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}) \times (0-20)^\circ\text{C} - 1{,}5\,\text{kg} \times 333 \times 10^3\,\text{J/kg} + \\ + 1{,}5\,\text{kg} \times 2100\,\text{J}/(\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}) \times (-12-0)^\circ\text{C} \simeq -6{,}6 \times 10^3\,\text{J} \end{aligned} \tag{3.9.1.2}$$

El signo menos indica que el calor es cedido por el agua.

Balance de calor

En un sistema aislado completamente, sin intercambio de energía con el exterior, el calor cedido por una parte del sistema ha de ser igual al calor absorbido por la otra parte. Por ejemplo, para 2 partes del sistema a distinta temperatura (como en la figura 3.20) considerando el calor en valor absoluto

$$\text{calor perdido por 1} = \text{calor ganado por 2} \tag{3.37}$$

O de forma más rigurosa, llamando Q_1 al calor intercambiado por la parte 1 y Q_2 al intercambiado por la parte 2[21] y considerando su signo (positivo si se absorbe, negativo si se cede) tenemos

$$Q_1 + Q_2 = 0 \tag{3.38}$$

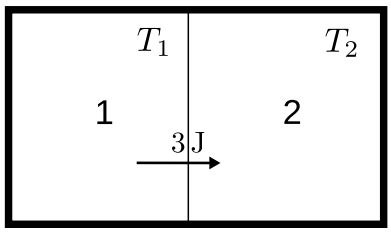


Figura 3.20: **Calor intercambiado entre 2 partes de un sistema.** En un sistema aislado del exterior, con 2 partes a distinta temperatura, el calor cedido por una parte es igual al absorbido por la otra. En este caso la parte 1 cede 3 J y la parte 2 los absorbe.

[21] Obviamente, si hay más componentes del sistema, se considerarán sus calores también

Un concepto importante para la calorimetría es la **temperatura de equilibrio** T_e. El intercambio de calor cesa en el momento en el que todos los elementos dentro del recipiente aislado se encuentran a la misma temperatura, esto es, se encuentran en equilibrio a la temperatura T_e. El balance de energía ha de hacerse considerando todos los procesos de absorción y cesión del calor que suceden entre los estados iniciales de las diferentes partes del sistema y **el estado final de equilibrio** T_e.

El balance de energía permite por ejemplo calcular T_e o las propiedades desconocidas de alguna sustancia, como en el ejemplo[22] siguiente

[22] Adaptado de

D. Jou, J.E. Llebot, and C. Pérez García. *Física para ciencias de la vida*. Mc Graw-Hill interamericana de España, Madrid, 1994

Ejemplo 3.9.2 Determinación del calor específico de una sustancia

Dentro de un calorímetro (que suponemos que no absorbe ni cede calor) tenemos 100 g de triclorometano a 35 °C. Añadimos 1,75 kg de agua a 18 °C y volvemos a cerrar el calorímetro. Transcurrido un cierto tiempo, la mezcla se estabiliza a 18,22 °C. ¿Cuál es el calor específico del triclorometano? Suponga que no hay pérdidas de calor a través del calorímetro ni al abrir ni cerrar.

SOLUCIÓN

El calor absorbido por el agua es cedido por el triclorometano que está inicialmente más caliente. Por tanto

$$Q_{TCM} + Q_{\text{agua}} = 0 \tag{3.9.2.1}$$

Ambas sustancias cambian su temperatura (no hay cambios de fase). Utilizando la expresión correspondiente del calor y tomando siempre la diferencia de temperaturas como la **final menos la inicial**, esto es, $\Delta T_{TCM} = (18{,}22 - 35)°\text{C}$ y $\Delta T_{H_2O} = (18{,}22 - 18)°\text{C}$

$$\begin{aligned} Q_{TCM} &= m_{TCM} c_{TCM} \Delta T_{TCM} \\ Q_{H_2O} &= m_{H_2O} c_{H_2O} \Delta T_{H_2O} \end{aligned} \tag{3.9.2.2}$$

Utilizando (3.9.2.1) y despejando c_{TCM} obtenemos

$$c_{TMC} = \frac{-m_{H_2O} c_{H_2O} \Delta T_{H_2O}}{m_{TCM} \Delta T_{TCM}} = \frac{-(1{,}75\,\text{kg})(4{,}18 \times 10^3\,\text{J}/(\text{kg}\cdot°\text{C}))(18{,}22°\text{C} - 18°\text{C})}{(0{,}1\,\text{kg})(18{,}22°\text{C} - 35°\text{C})} \simeq 959\,\text{J}/(\text{kg}\cdot°\text{C}) \tag{3.9.2.3}$$

El balance de calor puede complicarse si hay un cambio de fase de alguno de los elementos. Esto podría suceder cuando la T de cambio de fase de alguna de las sustancias es intermedia entre la temperatura más alta y la más baja de las sustancias inicialmente.

3.10 *Las leyes de la Termodinámica*

Sistema. Estado. Variables de estado. Proceso

Es conveniente definir algunos conceptos centrales en la termodinámica (figura 3.21):

- **Sistema (S)**: conjunto de objetos que estamos estudiando. Ejemplos: un gas en un pistón, una célula, los reactivos y productos en una reacción.
- **Alrededores o ambiente**: El resto que no pertenece al sistema y lo rodea.
- **Universo**: sistema + alrededores.

Los sistemas se clasifican como

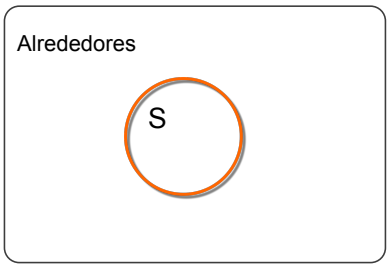


Figura 3.21: Definición de sistema, alrededores y universo termodinámico.

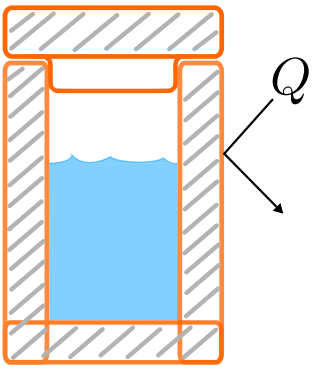


Figura 3.22: Un calorímetro cerrado es un ejemplo de sistema cerrado y aislado

- **Cerrados**: el sistema no intercambia materia con los alrededores. Estos a su vez pueden ser:
  - **Aislados**: no intercambian energía (ni calor ni trabajo), por ejemplo el calorímetro de la figura 3.22.
  - **No aislados**: intercambian energía.
- **Abiertos**: sistemas que intercambian materia (y probablemente energía también) con los alrededores. Ejemplo: los seres vivos o un calorímetro abierto (figura 3.23).

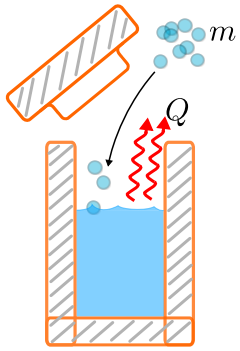


Figura 3.23: Ejemplo de sistema abierto que intercambia materia y energía en forma de calor.

Estado. El estado en que se encuentra un sistema viene determinado por sus **variables de estado**. Son magnitudes físicas que se aplican al sistema entero como T, V, P por ejemplo. Suelen cumplir una determinada *ecuación de estado* como por ejemplo en un gas ideal $PV = nRT$.

Proceso. Un proceso es un camino (una sucesión de diferentes estados) por el cual cambiamos de un estado inicial a otro estado final. Ejemplos son transformaciones isotermas (sin cambio de T), adiabáticas (sin intercambio de calor), etc... Normalmente los representaremos como un camino desde un estado inicial a otro en un diagrama como en la figura 3.24.

Funciones de estado. Las funciones de estado son cantidades que solo dependen del estado (de las variables de estado) y NO del camino por el que se ha llegado a dicho estado. Veremos varias como la energía interna, entropía, energía libre de Gibbs, entalpía, etc.... El trabajo y el calor NO son funciones de estado y dependen del proceso concreto.

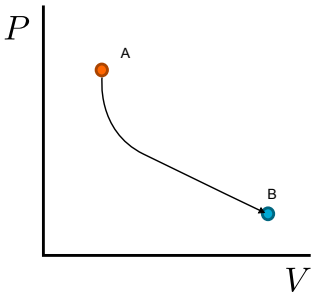


Figura 3.24: Proceso $A \rightarrow B$ en un diagrama PV, presión frente a volumen.

Primera Ley. Trabajo, calor y energía interna

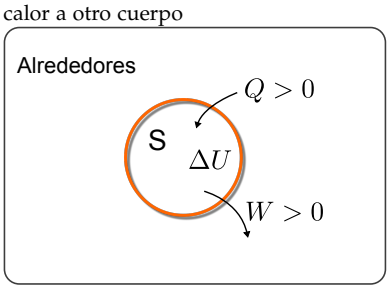
Consideremos la energía total de un sistema de partículas, esto es, la suma de las energías potenciales y cinéticas de todas las partículas que lo componen. Esto se denomina **energía interna** U[23]. Según vimos en mecánica, podemos aumentar el contenido de energía de un sistema realizando trabajo (mecánico) *sobre* él de modo que:

$$\Delta U = U_f - U_i = W_{\text{sobre}} \tag{3.39}$$

Sin embargo, en Termodinámica es frecuente usar un criterio de signos diferente y considerar el **trabajo** positivo ($W > 0$) cuando es realizado *por* el sistema y negativo ($W < 0$) cuando se realiza *sobre* el sistema. Esto es, utilizar el trabajo realizado *por* el sistema (en lugar de *sobre*) y que llamaremos simplemente W. Puesto que $W = W_{\text{por}} = -W_{\text{sobre}}$, la conservación de la energía (mecánica solo, sin calor) queda

$$\Delta U = U_f - U_i = -W \tag{3.40}$$

[23] A veces a esto se le llama energía térmica, ya que según veremos en un instante, un cuerpo puede perder energía interna al cederla en forma de calor a otro cuerpo



$\Delta U = Q - W$

Figura 3.25: **Primer principio y criterio de signos.** Tomaremos el criterio que dice que el $Q > 0$ cuando es absorbido por el sistema y $W > 0$ cuando lo realiza el sistema (a costa de su energía interna). Si se tomara el criterio mecánico para el trabajo $W = W_{\text{sobre}}$ entonces el primer principio se escribiría $\Delta U = Q + W$.

Finalmente, según la teoría cinética, el intercambio de calor entre dos cuerpos corresponde también a una transferencia de energía de uno a otro. Por tanto, es posible extraer energía de un sistema o cedérsela en forma de calor Q. Así, la primera ley de la termodinámica establece la conservación de la energía en procesos en los que además de trabajo W existe intercambio de calor Q:

$$\Delta U = Q - W \tag{3.41}$$

En esta expresión, el Q ha de llevar su signo correcto según el criterio que dice que es $Q > 0$ cuando es absorbido por el sistema y $Q < 0$ cuando lo cede. El criterio de signos se resume en la figura 3.25.

Hemos detallado mucho sobre Q en secciones anteriores, veamos algunos detalles sobre la energía interna y el W.

Energía interna

El primer principio tiene otro mensaje importante, además de la conservación de la energía. La energía interna es una función de estado, su variación ΔU solo depende del estado final e inicial[24] del proceso y es *independiente del camino* empleado para llegar del estado inicial al final. En contraste, el valor de Q y W dependen del proceso. La energía interna es la suma de las energías de todas las partículas del sistema y es en general difícil de calcular. Incluso en ese caso veremos que puede resultar útil.

[24] De sus variables de estado de hecho, presión, temperatura, etc...

Existen algunos casos en los que se puede calcular explícitamente, por ejemplo, los gases ideales. El resultado depende del número de átomos en la molécula.

- **Gas ideal monoatómico** (He, Ar, etc...). En la sección 3.4 relativa a la teoría cinética vimos que para un gas ideal de N partículas, debido a que no interactúan salvo en los choques, su energía es sólo cinética y obteníamos:

$$\begin{aligned} U\textbf{(g.i. monoat.)} &= \sum_{i=1}^{N} E_{cin,i} = E_{cin,1} + E_{cin,2} + \ldots + E_{cin,N} = \\ &= \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT \end{aligned} \tag{3.42}$$

La última igualdad se obtiene de $NK = nR$, donde n es el número de moles y R la constante de los gases ideales.

Opcional.
El factor 3 de la fórmula (3.42) se obtenía debido a que hay 3 direcciones en el espacio en las que una partícula se puede trasladar y tener energía cinética. Decimos que tiene 3 *grados de libertad*. Una molécula formada por 2 átomos, además de poder trasladarse en 3 direcciones puede rotar a mayor o menor velocidad en 2 dimensiones adicionales –la dirección de una varilla en el espacio se determina por 2 ángulos–. Así, una molécula de 2 átomos puede acumular energía cinética en 5 grados de libertad. El resultado es que la energía interna de un gas ideal diatómico es

- **Gas ideal diatómico** (CO, H_2, O_2, N_2, etc...)

$$U\textbf{(g.i. diat.)} = \sum_{i=1}^{N}(E_{cin,tras,i} + E_{cin,rot,i}) = \frac{5}{2}NkT \tag{3.43}$$

Para un gas diatómico a alta temperatura (del orden de miles de °C), hay que incluir la energía cinética y potencial asociada a la vibración y el resultado es $7/2NkT$.

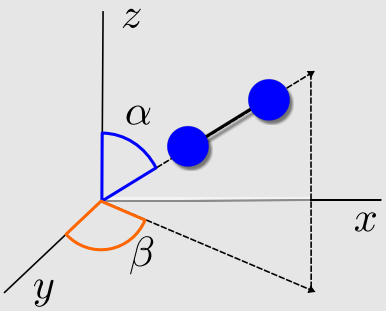


Figura 3.26: Una molécula diatómica tiene 2 grados de libertad adicionales (a los 3 de traslación) asociados a las posibles rotaciones

El W en algunos procesos.

Vamos a calcular el W en algunos procesos sencillos realizados con un gas ideal que se expande o comprime (cambia su volumen).[25] Para ello supongamos un gas a una determinada presión P dentro de un pistón con un émbolo móvil, como en la figura 3.27.

- **Proceso isobaro (P = cte.)**. Si el émbolo de área A se desplaza una longitud Δx bajo la acción de una presión constante P, el trabajo realizado es, según la definición de la mecánica de "fuerza × desplazamiento":

$$W = F\Delta x = PA\Delta x = P\Delta V, \text{ ya que} \tag{3.44}$$
$$F = PA \text{ y } \Delta V = A\Delta x \tag{3.45}$$

Es interesante notar que si el incremento de volumen $\Delta V = V_f - V_i$ es positivo ($\Delta V > 0$, expansión) el trabajo resulta positivo (lo efectúa el gas) y si $\Delta V < 0$ el gas se comprime, el trabajo es negativo y lo realizamos nosotros en contra de la presión del gas. Esto es coherente con el criterio de signos expuesto en la primera ley. En un diagrama $P - V$ un proceso isóbaro tiene el aspecto de la figura 3.28. Como vemos en la figura, el trabajo corresponde al área bajo la curva del proceso, con signo positivo si es una expansión y negativo si es una compresión. Esta noción nos permite generalizar el trabajo a cualquier proceso:

[25] El gas ideal, está muy alejado de los sistemas biológicos en principio, pero es interesante porque: es sencillo y permite estudiar la termodinámica con ejemplos concretos; los gases involucrados en reacciones químicas pueden sufrir grandes variaciones de volumen, lo que da lugar a valores grandes del W; el gas ideal es una buena aproximación para disoluciones diluidas.

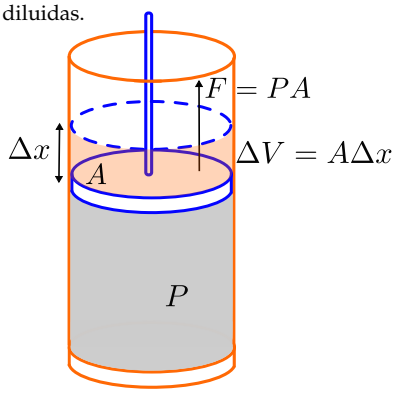


Figura 3.27: **Pistón.** Un gas ideal dentro de un pistón con émbolo móvil. Si desplazamos el pistón una longitud Δx el gas aumenta su volumen una cantidad $\Delta V = A\Delta x$.

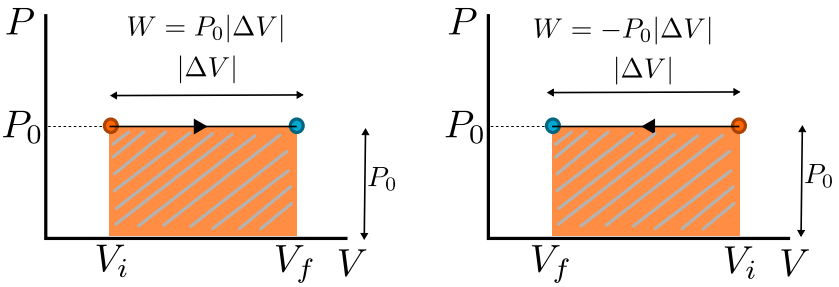


Figura 3.28: **Proceso isóbaro.** Un gas se expande (izquierda) o comprime (derecha) a presión constante P_0. En ambos casos, el trabajo coincide numéricamente con el área encerrada bajo la línea del proceso (área naranja rallada). En el caso de la expansión $W = +$"área" mientras que en la compresión $W = -$"área"

Proceso	Volumen	Trabajo
Expansión	$\Delta V > 0$	$W > 0$
Compresión	$\Delta V < 0$	$W < 0$

Tabla 3.4: El signo del trabajo en un cambio de volumen.

- **Proceso general.** El trabajo corresponde a + ó - el área bajo la curva del proceso (+ para expansión, - para compresión)[26]. Esto es válido también para sólidos y líquidos.

[26] Matemáticamente esto también se puede calcular como $W = \int PdV$, pero en general utilizaremos el área.

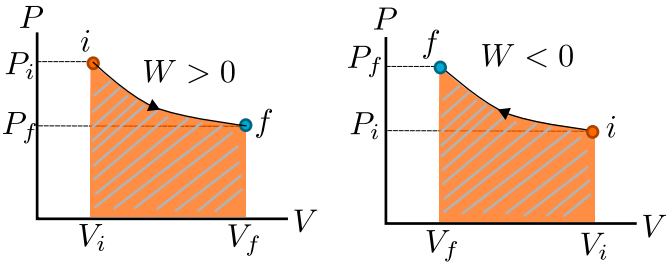
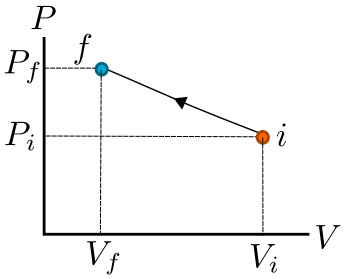


Figura 3.29: **Proceso General.** El $W > 0$ si el $V_f > V_i$ (expansión) como en la figura de la izquierda. Si $V_f < V_i$ (compresión) entonces $W < 0$ (figura de la derecha).

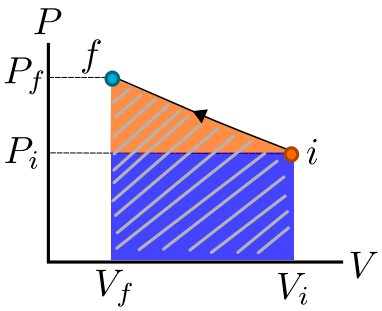
Ejemplo 3.10.1 **Cálculo de W utilizando áreas en proceso con $P \neq$ cte.**



Calcule el trabajo (con su signo) que realiza un gas ideal que recorre el proceso de la figura correspondiente a una compresión desde una presión y volumen iniciales $P_i = 101\,\text{kPa}$, $V_i = 20 \times 10^{-3}\,\text{m}^3$ a presión y volumen finales de $P_f = 202\,\text{kPa}$ y $V_f = 10 \times 10^{-3}\,\text{m}^3$.

SOLUCIÓN

El trabajo corresponde al área bajo la línea del proceso (en este caso un triángulo naranja + el rectángulo azul) con signo negativo ya que se trata en este caso de una compresión. Comenzamos calculando el área del triángulo naranja



$$W_1 = -(\text{área triángulo}) = -\frac{1}{2}(V_i - V_f)(P_f - P_i) = \\ = \frac{1}{2}(20\times10^{-3}\,\text{m}^3 - 10\times10^{-3}\,\text{m}^3)(202\,\text{kPa} - 101\,\text{kPa}) = \\ = -505\,\text{J} \qquad (3.10.1.1)$$

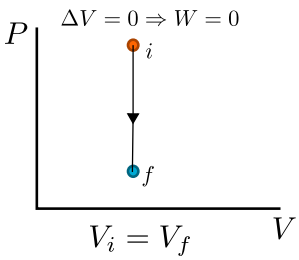
El área marcada de azul es (también negativa pues es compresión):

$$W_2 = -(\text{área rectángulo}) = -P_i(V_i - V_f) = -(101\,\text{kPa})(20\times10^{-3}\,\text{m}^3 - 10\times10^{-3}\,\text{m}^3) = \\ = -1010\,\text{J} \qquad (3.10.1.2)$$

Finalmente, el trabajo total del proceso $i \to j$ es la suma:

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 = -1515\,\text{J} \qquad (3.10.1.3)$$

- **Proceso isócoro (V = cte.).** En un proceso en el que no haya cambio de volumen $W = 0$ (figura 3.30, izq.).
- **Suma de procesos**. El trabajo total es la suma de los trabajos de los procesos individuales con su signo (figura 3.30, der.).



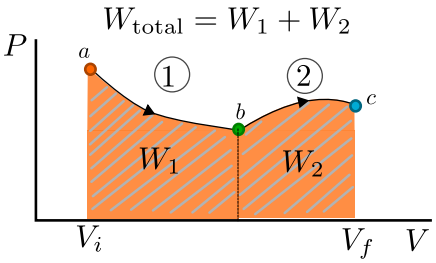


Figura 3.30: Izquierda: **Proceso isócoro.** El trabajo es nulo pues no hay expansión ni compresión. Derecha: **Suma de procesos** El trabajo total es la suma (algebraica) de los trabajos individuales

- **Ciclo.** Un ciclo es un proceso con inicio y fin en el mismo estado. El trabajo *total* en un ciclo es el área encerrada dentro del ciclo. Se deduce de dividir el ciclo en 2 tramos, el superior y el inferior. Como tienen signos contrarios, el área fuera del ciclo se cancela. El W_{ciclo} será **positivo** para un ciclo recorrido en el **sentido** de las **agujas** del reloj y **negativo** para un ciclo en **contra** de las agujas del reloj (figura 3.31) .
- **Proceso isotermo.** Un proceso isotermo es un proceso realizado a T = cte. Corresponde al área bajo la curva igualmente. En un gas

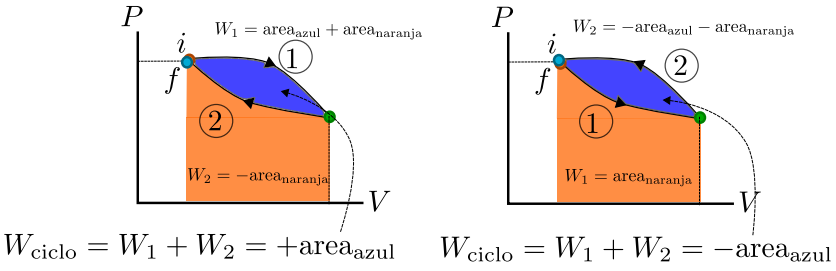


Figura 3.31: **Trabajo en un ciclo**. El trabajo del ciclo como suma de un trabajo de expansión y otro de compresión. A la izquierda, el trabajo de expansión "gana" al de compresión y el ciclo tiene $W_{\text{ciclo}} > 0$. A la derecha sucede lo contrario y $W_{\text{ciclo}} < 0$.

ideal, las isotermas corresponden a hipérbolas $P = nRT/V$ en el diagrama $P - V$.

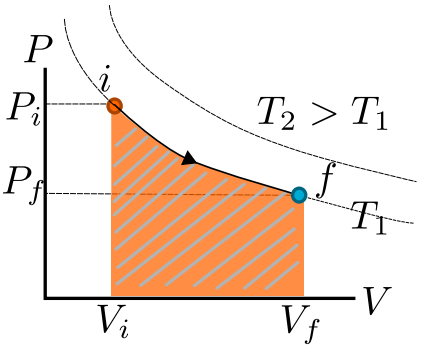


Figura 3.32: **Proceso isotermo.** Isotermas de gas ideal $P = nRT/V$ y trabajo en un proceso isotermo desde i hasta f.

Opcional.
En un gas ideal, el trabajo se puede calcular en general usando la ley de los gases ideales y la definición integral del trabajo. Por ejemplo, para una expansión o compresión isoterma tenemos:

$$W = \int_i^f P dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \\ = nRT(\log V_f - \log V_i) = nRT \log \frac{V_f}{V_i} \tag{3.46}$$

- **Proceso adiabático ($Q = 0$).** Un proceso adiabático es aquel en el que no hay intercambio de calor. El trabajo se puede calcular según el primer principio que, para $Q = 0$, se escribe

$$W = -\Delta U = U_i - U_f \text{ si } (Q = 0) \tag{3.47}$$

El primer principio aplicado a algunos procesos en el **gas ideal**.

Para el gas ideal monoatómico o diatómico la energía interna es sencilla y solo depende de T, $U(T) = \frac{3}{2}nRT$ o $U(T) = \frac{5}{2}nRT$. Aplicamos el primer principio en algunos proceso para un gas ideal monoatómico (3/2) pero es fácil generalizar a diatómico (5/2).

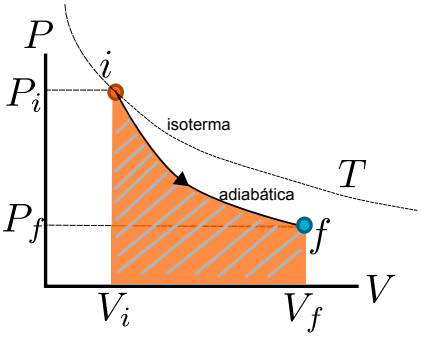


Figura 3.33: **Proceso adiabático.** Las adiabáticas tienen más pendiente que las isotermas en un gas ideal.

- Proceso isotermo en gas ideal. Para un proceso isotermo $T_f = T_i$ tenemos

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{3}{2}nRT_f - \frac{3}{2}nRT_i = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) = 0 \qquad (3.48)$$

  El primer principio queda entonces

$$Q = W \text{ (gas ideal y } T_f = T_i) \qquad (3.49)$$

  Esto se cumple para cualquier proceso cuya $T_f = T_i$ aunque no sea isotermo.

- Proceso adiabático ($Q = 0$) en gas ideal.

$$\Delta U = -W \Rightarrow W = -\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_i - T_f) \text{ (adiab. gas ideal)} \qquad (3.50)$$

El primer principio aplicado a ciclos.

En un ciclo el estado final e inicial coinciden. Por tanto $\Delta U = U_f - U_i = U_f - U_f = 0$ ya que la U es función de estado. El primer principio dice entonces

$$Q = W \text{ (en un ciclo)} \qquad (3.51)$$

*Unidades en expresiones tipo presion×volumen: ¿*atm · L *o* J*?*

OJO!! $1\,\text{atm}\cdot\text{L} \neq 1\,\text{J}$. La equivalencia es $1\,\text{atm}\cdot\text{L} = 101\,\text{J}$

El producto de presión por volumen (PV) tiene unidades de energía y se utiliza como acabamos de ver para calcular trabajos en los diagramas $P - V$ por ejemplo. En el sistema internacional las unidades correctas son Pa y m^3 respectivamente y efectivamente su producto es "julios"

$$[P][V] = \text{Pa}\cdot\text{m}^3 = \text{N}\cdot\text{m}^3/\text{m}^2 = \text{N}\cdot\text{m} = \text{J} \qquad (3.52)$$

Aunque NO es sistema internacional, se puede utilizar la atm para presión y el litro (L) para el volumen y por tanto utilizar atm · L para energía o trabajo, sabiendo que NO son equivalentes y que no se

pueden sumar atm · L con J. La equivalencia es fácil de obtener y será necesaria en problemas en que aparecen las dos:

$$1\,\text{atm}\cdot\text{L} \simeq 101\times10^{3}\,\text{Pa}\times1\times10^{-3}\,\text{m}^3 = 101\,\text{J} \tag{3.53}$$

Primera Ley y metabolismo animal. Ley de Kleiber

Para realizar los procesos de la vida se necesita, entre otras cosas, energía. Las plantas la obtienen mediante la fotosíntesis. Los animales a partir de la energía guardada en los enlaces químicos de los alimentos, utilizando reacciones químicas, que generan energía en forma de W y Q. Se puede utilizar el primer principio para analizar estos procesos.

Supongamos que durante un tiempo Δt una persona realiza una cantidad de trabajo mecánico $W > 0$ (sube escaleras, monta en bici, etc...). En muchos casos ese W se puede medir. En general habrá también una cantidad de calor que abandone el cuerpo $Q < 0$. ¿Se puede medir? Sí, por ejemplo, aislando la persona en una habitación y midiendo la cantidad de calor que hay que extraer para mantener la T de la habitación constante. Según el primer principio tenemos entonces que

$$\Delta U = Q - W < 0 \tag{3.54}$$

esto es, el organismo va consumiendo su energía interna al realizar algún proceso. ¿Cuando recupera energía interna, esto es, tiene un $\Delta U > 0$? Al ingerir alimentos, que poseen energía almacenada en sus enlaces químicos.

En metabolismo es más habitual medir los *ritmos* de producción de calor, trabajo o consumo de energía, esto es, la energía por unidad de tiempo o potencia. Dividiendo por Δt tenemos

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \dot{Q} - \dot{W} < 0, \tag{3.55}$$

donde el punto expresa el ritmo: $\dot{Q} = Q/\Delta t$ es el ritmo de producción de calor (calor por unidad de tiempo, o potencia) y $\dot{W} = W/\Delta t$ la potencia mecánica. Las unidades de los ritmos son las de potencia:

$$[\dot{Q}] = [\dot{W}] = \left[\frac{\Delta U}{\Delta t}\right] = \text{J/s} = \text{W} \tag{3.56}$$

Además, el ritmo de consumo de energía $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ se puede medir registrando la velocidad o tasa de consumo de oxígeno. La energía procede de reacciones similares a la combustión de los alimentos que necesitan oxígeno. La más habitual es la de la glucosa

$$1\,\text{mol de } C_6H_{12}O_6 + 134{,}4\ \text{L de } O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O \text{ producen } 2870\,\text{kJ} \tag{3.57}$$

Midiendo el consumo de O_2 en litros puede obtener la energía consumida. Un manera fácil es expresarlo en función del "equivalente energético del oxígeno" $EEO = \frac{E_{\text{producida}}}{\text{cantidad de } O_2}$:

$$EEO_{\text{glucosa}} = \frac{2870\,\text{kJ}}{134{,}4\,\text{L}} = 21{,}4\,\text{kJ/L} \tag{3.58}$$

¿Qué tiene de útil el EEO? Que es prácticamente el mismo para todas las sustancias que el cuerpo suele utilizar para generar E, como se muestra en la tabla 3.5 (adaptada de [27]) y podemos tomar el valor medio de 20,2 kJ/L para calcular:

$$|\Delta U| = 20{,}2\,\text{kJ/L} \times V_{O_2}(\text{L}) \tag{3.59}$$

Alimento	EEO (kJ/L)	Contenido de E (kJ/g)
Glúcidos	21.1	17.2
Proteinas	18.7	17.6
Grasas	19.8	38.9
Etanol	20.3	29.7
media	**20.2**	

Tabla 3.5: **EEO de distintos alimentos.** El EEO es muy parecido para todos los alimentos y podemos tomar por tanto su valor medio para estimar la energía consumida. Esto no ocurre con la energía por unidad de masa.

[27] J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988

Tasa o ritmo metabólico.

Se conoce como **tasa metabólica** al ritmo al que se consume la energía interna del organismo para una determinada actividad

$$RM = \left|\frac{\Delta U}{\Delta t}\right| \text{ en W} \tag{3.60}$$

La tasa metabólica **basal** RMB es la tasa correspondiente a "estar despierto descansando". Es aproximadamente proporcional a la masa corporal y en humanos es 1,2 W/kg para hombres y 1,1 W/kg para mujeres. Para una mujer de masa 65 kg sería

$$RMB = (1{,}1\,\text{W/kg})(65\,\text{kg}) = 71{,}5\,\text{W} \tag{3.61}$$

El RM asciende al realizar alguna actividad para proporcionar la energía necesaria (ver tabla3.6). El cuerpo humano tiene en general baja eficiencia y aunque una parte se utilice para realizar W casi toda la energía del RM se transforma en calor.

Actividad	RM/m_{cuerpo} (W/kg)
Despierto tumbado	♀1.1, ♂1.2
De pie	2.6
Correr	18
Montar en bici	8

Tabla 3.6: **RM.** El RM de distintas actividades expresado por unidad de masa del cuerpo de la persona que la realiza.

Podemos evaluar esa eficiencia o rendimiento comparando el trabajo realizado cuando se ejecuta una tarea con la energía que se gasta para hacerlo. Como el ritmo metabólico basal es potencia consumida hagas o no alguna tarea, se suele descontar del RM al calcular la eficiencia η, del siguiente modo

$$\eta = \frac{\dot{W}}{RM - RMB} \tag{3.62}$$

donde $\dot{W}$ es la potencia mecánica ejecutada al hacer la actividad (correr, montar en bici, subir escaleras, etc.)[28].

[28] Como la eficiencia es un cociente, en caso de potencias constantes, es equivalente comparar potencias o trabajos realizados en un mismo intervalo de tiempo

Ejemplo 3.10.2 **Energía utilizada en correr.**

¿Cuánta energía utiliza un mujer de $m = 65\,\text{kg}$ que corre durante 30 minutos? Si la energía la obtuviera exclusivamente a partir de su grasa corporal, ¿cuánta grasa habría consumido en ese tiempo?

SOLUCIÓN

a) Según la tabla 3.6 corriendo se consumen unos 18 W por cada kilo de masa corporal. El ritmo será

$$\left|\frac{\Delta U}{\Delta t}\right| = (18\,\mathrm{W/kg})(65\,\mathrm{kg}) = 1170\,\mathrm{W} \tag{3.10.2.1}$$

y el consumo total de energía

$$|\Delta U| = \left|\frac{\Delta U}{\Delta t}\right| \Delta t = (1170\,\mathrm{W})(30\,\mathrm{min})(60\,\mathrm{s/min}) = 2106\,\mathrm{kJ} \tag{3.10.2.2}$$

b) La grasa proporciona 38,9 kJ/g de energía. Para producir 2106 kJ necesitamos

$$m_{\mathrm{grasa}} = \frac{2106\,\mathrm{kJ}}{38{,}9\,\mathrm{kJ/g}} \simeq 54\,\mathrm{g} \tag{3.10.2.3}$$

Ley de Kleiber.

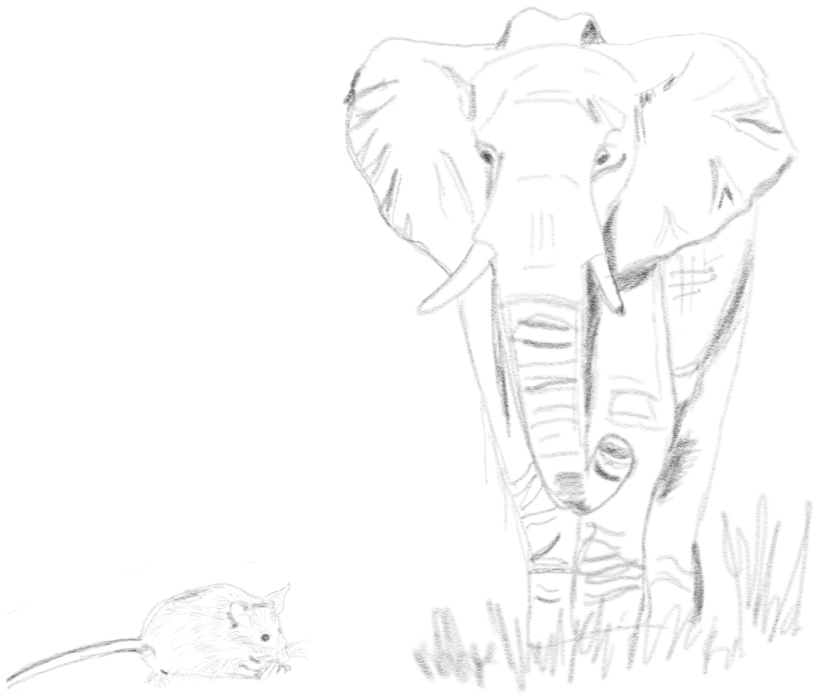


Figura 3.34: El modo de vida y las necesidades energéticas están relacionadas con el tamaño del animal. ¿Por qué los ratones tienen movimientos frenéticos y los elefantes son de movimientos más lentos? Proporcionalmente a su masa, los ratones tienen un metabolismo más rápido que los elefantes. Los ratones necesitan ingerir en torno al 15 % de su peso en comida al día, mientras que un elefante apenas llega al 6 %. ¿A qué se debe? Esta sección nos da pistas sobre este fenómeno. Dibujo de L.D.

El ritmo de metabolismo basal sigue una ley de tipo *alométrico*, esto es hay determinada relación entre el ritmo metabólico basal y el tamaño o masa del cuerpo del animal. Según Kleiber[29]

$$RMB \simeq 3{,}6 m^{0{,}73} \tag{3.63}$$

para los animales de sangre caliente, desde el ratón al elefante[30]. Esto

[29] M. Kleiber. Body size and metabolism. *Hilgardia*, 6(11):315–353, January 1932

[30] K. Bogdanov. *El físico visita al biólogo*. MIR, Moscú, 1989

significa que aunque el RMB (y el gasto diario de energía y por tanto las necesidades de alimento) es mayor para animales mayores, el ritmo NO es directamente proporcional a la masa (exponente 1) si no que crece más despacio. En relación a su masa, el ritmo de animales mayores es más lento, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10.3 Ritmo Metabólico del ratón y el elefante.

Suponiendo correcta la ley de Kleiber, el ritmo metabólico específico ($RMBE$)–el ritmo por cada kilo– para el ratón y el elefante serían

$$RMBE_{\mathrm{r}} = 3{,}6\frac{m_r^{0{,}73}}{m_r} = 3{,}6m_r^{-0{,}27}$$
$$RMBE_{\mathrm{e}} = 3{,}6\frac{m_e^{0{,}73}}{m_e} = 3{,}6m_e^{-0{,}27} \tag{3.10.3.1}$$

y por tanto

$$\frac{RMBE_{\mathrm{r}}}{RMBE_{\mathrm{e}}} = \left(\frac{m_r}{m_e}\right)^{-0{,}27} = \left(\frac{m_e}{m_r}\right)^{0{,}27} \tag{3.10.3.2}$$

Tomando masas de $m_e = 6000\,\mathrm{kg}$ y $m_r = 19\,\mathrm{g}$ obtenemos

$$\frac{RMBE_{\mathrm{r}}}{RMBE_{\mathrm{e}}} = \left(\frac{m_e}{m_r}\right)^{0{,}27} = \left(\frac{6000\,\mathrm{kg}}{0{,}019\,\mathrm{kg}}\right)^{0{,}27} = 30{,}5 \text{ veces} \tag{3.10.3.3}$$

En proporción a su masa, el "ritmo al que viven" los ratones es de unas 30 veces más rápido que el de los elefantes. De hecho, la longevidad media de un ratón *Mus musculus* es aproximadamente de 1 a 2 años, mientras que para el elefante *Loxodonta africana* es en torno a 40-60 años, lo cual da una relación parecida. La misma relación aproximadamente de 30 la encontramos en la frecuencia cardiaca en reposo de 300-800 pulsaciones por minuto para el ratón y de 20-30 para el elefante, o en el periodo de gestación de 20 días a 22 meses respectivamente.

¿3/4 ó 2/3? El exponente de la ley de Kleiber es muy cercano a $0{,}75 = 3/4$. Existe algo de controversia en cuanto al exponente exacto y el origen de la ley, aunque parece aceptado que está entre $2/3$ y $3/4$. Una posible justificación en cuanto a la razón de esta ley se obtiene del balance entre el calor generado y el calor expulsado al exterior, aunque esto produce un exponente $2/3$.

Supongamos la situación de reposo en la que un animal no realiza trabajo $W = 0$ y su ritmo metabólico es el basal. Según hemos visto el ritmo al que se produce calor en el cuerpo de un animal será

$$\dot{Q}_{\mathrm{gen}} = \left|\frac{\Delta U}{\Delta t}\right| = RMB \tag{3.64}$$

Por otro lado, el calor se pierde hacia el medio ambiente de forma proporcional a la superficie, como vimos en la transmisión del calor $\dot{Q}_{\mathrm{perd}} \propto A$. Por ejemplo en el calor por conducción[31].

[31] Aunque consideremos otro mecanismo, el ritmo también será proporcional al área

$$\dot{Q}_{\text{perd}} = k\frac{\Delta T}{l}A \tag{3.65}$$

Como solo nos interesa el exponente, podemos agrupar todo lo que va delante del área en un solo coeficiente $a = k\Delta T/l$

$$\dot{Q}_{\text{perd}} = aA \tag{3.66}$$

Para seguir avanzando necesitamos relacionar el área del animal con su masa. Los animales de mayor masa tendrán mayor área de piel. Vamos a suponer un animal esférico de tamaño o radio R. Aunque los animales no son esféricos, sí se cumple que su volumen es una distancia al cubo, su superficie una distancia al cuadrado, etc.... Como veremos con eso es suficiente para calcular el exponente. Tomando un animal esférico como el de la figura 3.35 tenemos que su área es $A = 4\pi R^2$ y su volumen $V = 4\pi R^3/3$. Recordando que la densidad es $\rho = M/V$ podemos relacionar área con masa:

$$\begin{aligned} m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3} m^{1/3} \Rightarrow R^2 = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} m^{2/3} \\ \Rightarrow A = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} m^{2/3} \end{aligned} \tag{3.67}$$

Agrupando términos en una constante $b = 4\pi\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$ podemos expresar el área más sencillamente

$$A = bm^{2/3} \tag{3.68}$$

Utilizando la expresión del área (3.68) en (3.66) escribimos el calor perdido como

$$\dot{Q}_{\text{perd}} = ab\ m^{2/3} \tag{3.69}$$

Para que el animal mantenga su T constante, tiene que existir un balance entre el calor perdido y el calor generado, de donde obtenemos utilizando (3.64) y (3.69)

$$\dot{Q}_{\text{gen}} = \dot{Q}_{\text{perd}} \Rightarrow RMB = ab\ m^{2/3} \tag{3.70}$$

Este argumento predice un aumento del RMB con la masa

$$RMB \propto m^{2/3} \tag{3.71}$$

del tipo de ley de Kleiber, pero con exponente 2/3 algo menor a 0,73. Es interesante señalar que algunos estudios[32] más recientes que el de Kleiber efectivamente encuentran un exponente cercano a 2/3.

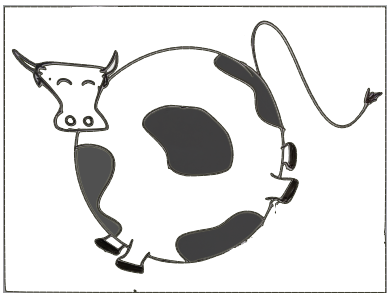


Figura 3.35: **Vaca esférica.** Animal esférico considerado en el texto. Aunque los animales no son esféricos, el exponente calculado es el mismo que considerando otras formas.

[32] C. R. White and R. S. Seymour. Mammalian basal metabolic rate is proportional to body mass 2/3. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(7):4046–4049, April 2003

Entalpía

Muchos procesos en biología se realizan a $P = cte.$ (por ejemplo los que se realizan a presión atmosférica). Resulta conveniente definir la función de estado termodinámica llamada **entalpía**

$$H = U + PV \tag{3.72}$$

La entalpía es función de estado ya que para calcularla solo hacen falta variables de estado. ¿Qué utilidad tiene la entalpía? Se utiliza en cualquier sistema termodinámico, no solo gases, y tiene la siguiente propiedad. Calculemos su variación en un proceso de un estado inicial i a uno final f

$$\Delta H = H_f - H_i = U_f + P_f V_f - (U_i + P_i V_i) = \Delta U + P_f V_f - P_i V_i \tag{3.73}$$

En el caso de que la presión sea constante ($P_f = P_i = P$) en el proceso entonces $P_f V_f - P_i V_i = P(V_f - V_i) = P\Delta V$ y la variación de entalpía es

$$\Delta H = H_f - H_i = \Delta U + P\Delta V \ (P = \text{cte.}) \tag{3.74}$$

Ahora bien, en un proceso a $P = cte.$ el término $P\Delta V$ es el trabajo de expansión/compresión, de modo que $\Delta U = Q - P\Delta V$ y entonces

$$\Delta H = H_f - H_i = Q - P\Delta V + P\Delta V = Q \ (P = \text{cte.}) \tag{3.75}$$

Esto es **en un proceso a presión constante** la variación de entalpía ΔH coincide con el calor intercambiado Q. Sin embargo no son lo mismo **en general**: ΔH depende solo del estado final e inicial y Q depende del proceso concreto. En la figura se comparan dos procesos, a y b con los mismos estados inicial y final. El proceso a es a $P = cte.$ y en él el sistema absorbe 30 J en forma de calor. El proceso b no es a presión constante. Tenemos

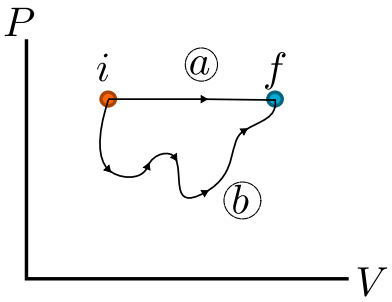


Figura 3.36: **Entalpía es función de estado.** Dos procesos a y b que empiezan y acaban en los mismos estados tienen la misma variación de entalpía. Solo en el proceso a a $P = cte.$ se cumple que $Q = \Delta H$.

$$\begin{aligned} \text{Proceso a: } \Delta H_a &= H_f - H_i = 30\,\text{J} \\ Q_a &= 30\,\text{J} \\ \text{Proceso b: } \Delta H_b &= H_f - H_i = 30\,\text{J} \\ Q_b &\neq Q_a \end{aligned} \tag{3.76}$$

Otras propiedades de H.

- Como función de estado también cumple que

$$\text{Ciclo } (i = f) \Rightarrow \Delta H = H_f - H_i = H_f - H_f = 0 \tag{3.77}$$

$$\text{En proceso inverso } f \to i \Rightarrow \Delta H_{f\to i} = H_i - H_f = -\Delta H_{i\to f} \tag{3.78}$$

- Para un gas ideal monoatómico por ejemplo

$$H = U + PV = \frac{3}{2}nRT + nRT = \frac{5}{2}nRT, \text{ puesto que } PV = nRT \tag{3.79}$$

- En una reacción química como esta por ejemplo

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C} + \mathrm{D} \tag{3.80}$$

tenemos que $\Delta H = H_{\text{prod}} - H_{\text{reac}} = H_C + H_D - H_A - H_B$. Si $\Delta H > 0$ la reacción es endotérmica y necesita absorber $Q = \Delta H > 0$ para verificarse **a presión constante**. Si $\Delta H < 0$ la reacción será exotérmica, liberará un calor $Q = \Delta H < 0$ si se hace a presión constante y esta energía estará disponible para utilizarse en algún otro proceso. Por ejemplo, la energía liberada en la reacción de combustión de la glucosa (fig. 3.37) se puede utilizar por el cuerpo para verificar algún otro proceso que necesite energía.

Pero, ¿por qué ΔH representa mejor la energía disponible para aprovechar que ΔU que es precisamente la variación de energía entre productos y reactivos? Para entender esto, supongamos que se verifica, dentro de un pistón mantenido a $P = cte.$ una reacción exotérmica entre reactivos en disolución (no gases) y como resultado se produce un gas, como en la figura 3.38. Para producir el gas (que ocupa un volumen V_g frente a o inicialmente) es necesario hacer un $W = P\Delta V$, donde $\Delta V = V_{\text{prod}} - V_{\text{reac}}$ es el cambio de volumen de los productos menos el de los reactivos. Al verificar la reacción, una energía $P\Delta V$ se utiliza *necesariamente* para la expansión del gas contra la presión cte. y no puede utilizarse para otra cosa. Veámoslo con un ejemplo.

$$\mathrm{C_6H_{12}O_{6(s)}} + 6\,\mathrm{O_{2(g)}} \longrightarrow 6\,\mathrm{CO_{2(g)}} + 6\,\mathrm{H_2O_{(l)}}$$
$$\Delta H = -2808\,\mathrm{kJ/mol}$$

Figura 3.37: **Combustión de la glucosa.** En la combustión de la glucosa se liberan 2808 kJ/mol cuando se realiza a presión constante

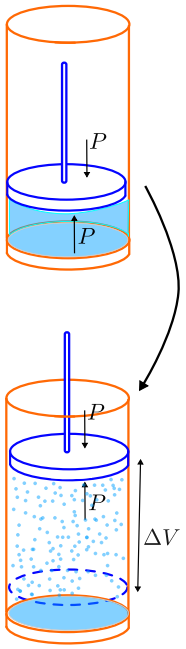


Figura 3.38: Reacción verificada a presión constante. Estado inicial en el que los reactivos están en fase líquida (**arriba**) y estado final (**abajo**) en el que al menos uno de los productos está en fase gas. La mayor parte del cambio de volumen se debe a la aparición del gas.

Ejemplo 3.10.4 **Reacción exotérmica con producción de gas**

Se sabe que en la reacción $\mathrm{A_{(l)}} + \mathrm{B_{(l)}} \longrightarrow 2\,\mathrm{C_{(g)}}$ la variación de energía interna es $-200\,\mathrm{kJ/mol}$. Si la reacción se verifica a $P = 1\,\mathrm{atm}$ y $T = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$, ¿cuál será la variación de entalpía y el calor liberado por la reacción?

SOLUCIÓN

La variación de entalpía será, puesto que P es constante, $\Delta H = \Delta U + P\Delta V = Q$. Necesitamos calcular el término $P\Delta V$ esto es el trabajo de expansión. Por cada mol de reactivo A se producen 2 moles de C. Usando la ley de los gases ideales podemos calcular el V_f que ocupan. O mejor aún, puesto que el volumen inicial de gas es $V_i = 0$

$$P\Delta V = P(V_f - V_i) = PV_f = nRT \tag{3.81}$$

Entonces, la ΔH cuando reacciona 1 mol de A

$$Q = \Delta H = \Delta U + P\Delta V = \Delta U + nRT = -(200\,\text{kJ/mol})(1\,\text{mol}) + (2\,\text{mol})(8{,}31\,\text{J/(K}\cdot\text{mol)})(298\,\text{K}) = \\ = (-200+5)\text{kJ} = -195\,\text{kJ} \tag{3.82}$$

por cada mol de A que reaccione. El calor coincide con ΔH al ser la P constante.

Nota: es posible que los líquidos también sufran algún cambio de volumen en la reacción (de hecho en este caso desaparecen), pero este es normalmente muy pequeño frente a los cambios de volumen asociados a los gases (debido a la mucho mayor densidad de líquidos frente a gases) y se suele despreciar.

Segunda Ley. Entropía

La segunda ley permite distinguir los procesos que ocurren espontáneamente en la naturaleza y los que no. En los ejemplos representados en la figura 3.39 se cumple la conservación de la energía, tanto en el proceso directo como en el inverso. No están prohibidos por la primera ley pero sin embargo suelen ocurrir en la naturaleza solo en uno de los dos sentidos.

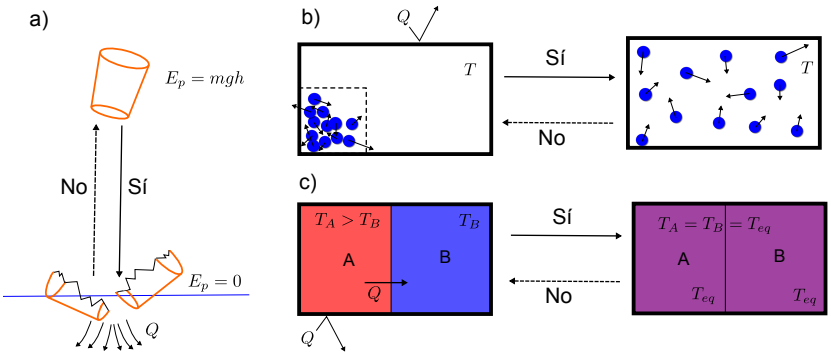


Figura 3.39: **a)** Un vaso cae al suelo y se rompe en pedazos. La energía potencial se transforma en energía para romper los enlaces dentro del vidrio y en forma de calor. **b)** Las moléculas de un gas, inicialmente confinadas en una pequeña región se expanden hasta ocupar todo el volumen disponible. **c)** Una parte más caliente de un sistema aislado cede calor a una parte más fría y equilibran sus temperaturas.

En términos sencillos, la segunda ley dice:

Los cambios en la naturaleza ocurren de manera espontánea de forma que la **energía** y la **materia** se dispersan, reparten o **desordenan** y de forma que un sistema **aislado** tiende al equilibrio.

La **2ª ley de la Termo** en palabras llanas

Una pista de la razón de este comportamiento nos la aporta la teoría cinética, según la cual las moléculas están en continuo movimiento y en cierto sentido es como si se movieran al azar. De esta manera, los sistemas tienden a colocarse en los estados macroscópicos (de T, P, etc...) más probables (los que corresponden a un mayor número de estados microscópicos)[33]. En el ejemplo de la figura 3.39b) hay muchas más maneras de colocar las N partículas en toda la caja que si lo hiciéramos solamente en la sección recuadrada. Tendemos a ver estados macroscópicos que corresponden al recipiente lleno con mucha mayor probabilidad[34].

[33] Con esta visión en mente, en realidad la segunda ley simplemente dice que lo que solemos ver en la naturaleza es simplemente aquello más probable.

[34] Si el número de partículas es muy grande como ocurre con el número de moléculas en una cantidad apreciable de cualquier gas, esta probabilidad es infinitamente mayor hasta el punto de que cualquier otro estado no es observable en la edad del universo

Ejemplo 3.10.5 La baraja de cartas y la segunda ley.

Tomemos para empezar 5 cartas de la baraja, del mismo palo y del 1 al 5. Llamamos microestado al orden exacto en que están las cartas, por ejemplo, {3,2,5,1,4}. Como son permutaciones de 5 elementos, tenemos $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ microestados distintos. Supongamos que con nuestros sentidos solo pudiéramos percibir o solo estuviéramos interesados en si las cartas están o no formando escalera. Entonces tenemos solo los 2 siguientes macroestados definidos por una cualidad que llamamos **orden** o "escaleridad" por ejemplo:

- Estado con alto orden, **Escalera**: solo formado por 2 microestados {1,2,3,4,5} y {5,4,3,2,1}
- Estado con bajo orden. El resto de los microestados los consideramos desordenados y los agrupamos en el (macro)estado **Desordenado**: {1,4,2,3,5},{1,3,4,5,2},etc.... Este macroestado engloba $120 - 2 = 118$ microestados diferentes.

El movimiento aleatorio de las moléculas está representado en este ejemplo por la acción de barajar. Comenzamos con el estado **Escalera** y barajamos bien. Lo *más probable* (118 veces de cada 120 en promedio) es que acabemos con un microestado correspondiente al estado **Desordenado**. La evolución espontánea corresponde a pasar de **Escalera** a **Desordenado**. El proceso inverso puede ocurrir, pero es poco probable (menos de 2 % de probabilidad), incluso aunque barajemos muchas veces es difícil recuperar el estado **Escalera**. El estado **Desordenado** representa el estado de equilibrio. Esto es aún más acusado según vamos añadiendo cartas al juego. Es interesante señalar que desde el punto de vista microscópico, todas las ordenaciones particulares ({1,2,3,4,5} o {4,5,2,1,3}) tienen en principio la misma probabilidad de salir tras un barajado aleatorio. La diferencia entre el estado macroscópico **Desordenado** y el **Escalera** consiste en el número de microestados compatibles con cada uno.

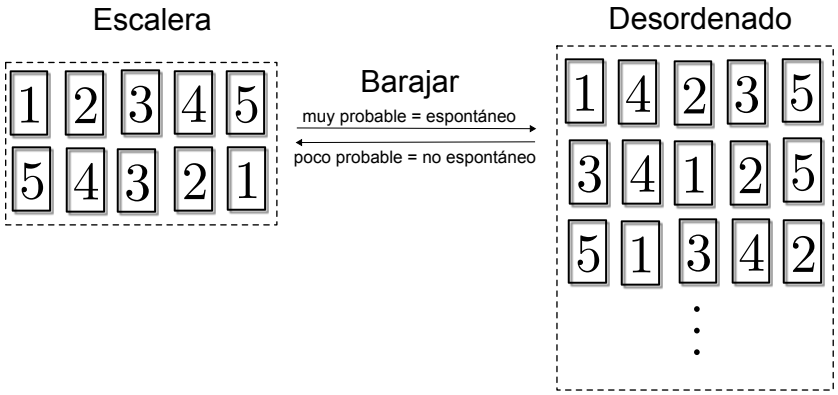


Figura 3.40: **La analogía de la baraja.** Cuando barajamos lo más probable es pasar de un estado de Escalera a uno no secuencial. El proceso inverso, de un estado Desordenado a una escalera puede ocurrir con 5 cartas, aunque es difícil. Con 40 cartas se vuelve extremadamente poco probable. En un sistema físico grande (macroscópico), el número de "cartas" con el que jugamos, esto es, de moléculas es astronómico.

Forma macroscópica de la segunda ley. Entropía

La medida de la "dispersión" o "desorden" de la materia y la energía es la **entropía** S. La segunda ley dice que:

En un sistema **aislado** la entropía siempre crece o permanece constante:

$$\Delta S_{\text{aislado}} \geq 0.$$

La **2ª Ley de la Termo** en su forma clásica

donde el signo $=$ corresponde a los procesos reversibles. El cambio de entropía se puede medir en un proceso *reversible* (a T constante)[35] según

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{reversible}}}{T} \tag{3.83}$$

[35] Se puede generalizar a T variable mediante una integral

donde T es la temperatura a la que se lleva a cabo el proceso. $Q_{\text{reversible}}$ es el calor transferido al sistema de forma reversible.

La S definida según (3.83), es una medida de la aleatoriedad o dispersión añadida al sistema.

Un *proceso es reversible* si se lleva a cabo de forma que se está siempre **muy cerca del equilibrio** (tanto mecánico como térmico: no hay diferencias grandes de presión ni de temperatura). Por ejemplo, si en un proceso se transfiere W o Q para que el proceso sea **reversible** :

- La presión exterior tiene que ser en todo momento muy cercana de la presión del sistema $P \approx P_{\text{ext}}$, como en la figura 3.41 (izquierda).
- La parte que cede calor tiene que estar a la misma temperatura aproximadamente que la parte que absorbe calor. En la figura 3.42, $T_1 \approx T_2$ (izquierda).

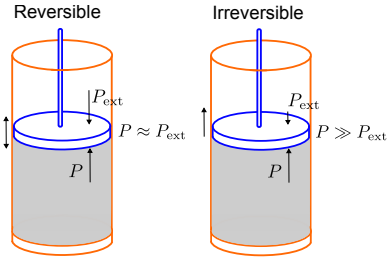


Figura 3.41: **Presión**. El proceso de la izquierda es reversible, las presiones están *casi* equilibradas en todo momento. Con un ligero incremento o descenso de la presión interior podemos hacer que el gas se expanda o se comprima. No ocurre así en el proceso de la derecha que corresponde a una expansión irreversible.

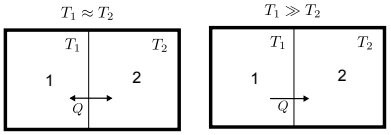
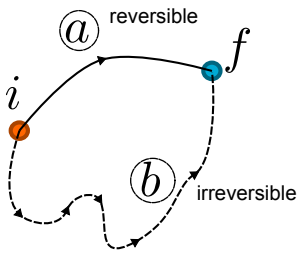


Figura 3.42: **Temperatura**. El proceso de la izquierda es reversible, las temperaturas están *casi* equilibradas en todo momento. Modificando ligeramente la T_1 por encima o debajo de T_2 podemos revertir el sentido de la transferencia de Q. No ocurre así en el proceso de la derecha que corresponde a una transferencia irreversible de calor.

Estrictamente, ningún proceso real es así, es una aproximación similar a suponer que no hay rozamiento o que algo está completamente aislado, etc...

Sin embargo, también se puede calcular ΔS para procesos irreversibles. Tenemos que imaginar un proceso reversible con igual estado inicial y final que el proceso irreversible y calcular ΔS para el proceso reversible. Después, la entropía es una función de estado y por tanto su variación no depende del proceso concreto por lo que es válida para el proceso irreversible también (figura 3.43).



$$\Delta S_a = \Delta S_b$$

Figura 3.43: S es función de estado. Podemos calcular ΔS a través del camino a y este valor será el mismo para todo proceso que comience en el estado i y acabe en f

Ejemplo 3.10.6 **Variación de S en un proceso reversible y otro irreversible**

1 kg de hielo a $T_h = 0\,^\circ$C se funde y transforma totalmente en agua líquida en un ambiente a T_{amb}. Calcule la variación de entropía en el caso de que $T_{\text{amb}} = 0\,^\circ$C y para $T_{\text{amb}} = 20\,^\circ$C. ¿En cuál de las dos situaciones el proceso es reversible? **Datos:** El calor latente de fusión del hielo es $l = 334\,\text{kJ/kg}$.

SOLUCIÓN

Para que el hielo se funda es necesario suministrarle una cierta cantidad de calor $Q_h = ml$

a) En el primer caso, $T_{\text{amb}} = T_h$ de modo que la transferencia de calor se realiza *sin apenas* diferencia de temperatura (podemos suponer que el ambiente está a una temperatura solo ligeramente superior de modo que el calor necesario fluya del ambiente hacia el trozo de hielo, por ejemplo a $T_{\text{amb}} = 0{,}0001\,^\circ$C y para calcular tomamos $T_{\text{amb}} = 0\,^\circ$C). De modo que este proceso sucede de forma reversible y calculamos la variación de entropía *del hielo* en el proceso de fusión según la definición

$$\Delta S_h = \frac{Q_{\text{rev}}}{T} = \frac{Q_h}{T_h} = \frac{334\,\text{kJ/kg} \times 1\,\text{kg}}{273\,\text{K}} \simeq 1{,}22 \times 10^3\,\text{J/K} \tag{3.10.6.1}$$

Nótese que ΔS_h es positivo y esto es lógico pues el estado final (agua líquida) es más desordenado que el estado inicial (agua sólida). En el proceso inverso, la congelación, tendríamos $\Delta S_h^{\text{cong}} < 0$.

b) En el caso de $T_{\text{amb}} = 20\,^\circ$C el proceso es irreversible, pues la transferencia de calor se hace entre dos cuerpos a temperaturas distintas. No obstante, para el hielo, el proceso tienen el mismo estado final (agua a $0\,^\circ$C, solo estamos analizando la fusión, no un posible calentamiento posterior) e igual estado inicial (hielo a $0\,^\circ$C) que en el apartado anterior, de modo que, como S es función de estado tenemos que:

$$\Delta S_h = 1{,}22 \times 10^3\,\text{J/K} \tag{3.10.6.2}$$

La diferencia entre ambos procesos, el a) y el b) se encuentra analizando el ambiente o alrededores (o como veremos más adelante, el universo = alrededores + sistema). Según la conservación de la energía, sabemos que $Q_{\text{amb}} = -Q_h$. De modo que la variación de entropía de los alrededores vale en el caso

a) reversible ($T_{\text{amb}} = 273\,\text{K}$):

$$\Delta S_{\text{amb}} = \frac{Q_{\text{amb}}}{T_{\text{amb}}} = \frac{-Q_h}{T_{\text{amb}}} = -1{,}22 \times 10^3\,\text{J/K} \tag{3.10.6.3}$$

b) e irreversible ($T_{\text{amb}} = 293\,\text{K}$):

$$\Delta S_{\text{amb}} = \frac{Q_{\text{amb}}}{T_{\text{amb}}} = \frac{-Q_h}{T_{\text{amb}}} = \frac{-334\,\text{kJ/kg} \times 1\,\text{kg}}{293\,\text{K}} \simeq -1{,}14 \times 10^3\,\text{J/K} \tag{3.10.6.4}$$

¿Cómo predice la segunda ley la espontaneidad o no de los procesos?

O equivalentemente, ¿cómo distinguimos un suceso espontáneo de otro que no lo es? Tenemos que aplicar la segunda ley a un sistema *aislado*. En general hay estas opciones:

- **El sistema de interés es aislado**. Los procesos espontáneos son aquellos que tienen $\Delta S \geq 0$.

- **El sistema está hecho de varias partes que intercambian calor.** Es necesario aplicar la segunda ley al conjunto completo. Teniendo en cuenta que la entropía de un sistema cualquiera es la suma de las entropías de las partes[36] tenemos que los procesos espontáneos cumplen $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots \geq 0$. Nótese que cada una de ellas por separado (ΔS_1, ΔS_2, etc...) puede ser positiva o negativa.

[36] Técnicamente, se dice que S es aditiva.

- **El sistema intercambia calor con sus alrededores.** Es un caso particular de la anterior muy frecuente y relevante. Hay 2 partes sistema + alrededores y conjuntamente forman el universo que es aislado. Los procesos espontáneos son aquellos que tienen $\Delta S_{\text{Univ}} = \Delta S + \Delta S_{\text{alr}} \geq 0$. Además la fuente, por ser muy grande, se considera siempre que cambia poco su estado termodinámico, en particular su T, y por tanto $\Delta S_{\text{alr}} = Q_{\text{alr}}/T_{\text{alr}}$ **independientemente de si el proceso analizado es o no reversible**[37].

$\Delta S_{\text{foco}} = \frac{Q_{\text{foco}}}{T_{\text{foco}}}$, **siempre** para un foco térmico

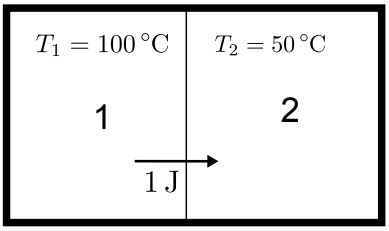
[37] Mark Waldo Zemansky and Richard H. Dittman. *Calor y termodinámica*. McGraw-Hill, 1984

Veamos cómo predice la espontaneidad del paso de calor de cuerpos calientes a fríos con un ejemplo.

Ejemplo 3.10.7 Dos partes de un sistema intercambian calor

Supongamos que un sistema aislado está hecho de 2 partes (parte 1 y parte 2) cuyas masas son muy grandes y se encuentran a temperaturas diferentes $T_1 = 100\,^\circ\text{C}$ y $T_2 = 50\,^\circ\text{C}$. Si intercambian 1 J de calor, calcular la variación de entropía si el calor pasa de la parte caliente a la fría o bien sucede al contrario. ¿Cuál de los dos sucesos es espontáneo?

$T_1 > T_2$



SOLUCIÓN

Suponemos primero que el calor pasa del caliente al frío, de modo que $Q_1 = -1\,\text{J}$ (1 cede) y $Q_2 = -Q_1 = 1\,\text{J}$ (2 absorbe). Como las masas son grandes, podemos suponer que 1 J transferido no cambia las temperaturas prácticamente y calcular las variaciones como procesos a $T =$ cte.. Entonces, las variaciones de entropía serán:

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{-1\,\text{J}}{(273+100)\text{K}} = -0{,}0027\,\text{J/K} \qquad (3.10.7.1)$$
$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{1\,\text{J}}{(273+50)\text{K}} = +0{,}0031\,\text{J/K}$$

y la variación total de entropía será $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -0{,}0027\,\text{J/K} + 0{,}0031\,\text{J/K} = 0{,}0004\,\text{J/K} > 0$.

En el caso contrario, que 1 J fuera transferido de la parte fría a la caliente ahora $Q_1 = 1\,\text{J}$ y $Q_2 = -1\,\text{J}$ y el resultado total sería $\Delta S_{\text{total}} = -0{,}0004\,\text{J/K} < 0$. Como el sistema total es un sistema aislado, lo único compatible con la segunda ley es el primer caso con $\Delta S_{\text{total}} > 0$ y por tanto el calor se transfiere espontáneamente del cuerpo caliente al frío y no al revés.

Energía libre de Gibbs

Frecuentemente encontramos sistemas que intercambian energía con sus alrededores que consideramos un foco térmico a $T = \text{cte}$ y a $p = \text{cte}$. Por ejemplo: una reacción química se da en una célula dentro del cuerpo a 37 °C, una persona intercambia calor con una piscina a 27 °C, etc... En tal caso resulta útil definir la función termodinámica G energía libre de Gibbs y utilizar lo aprendido en la sección anterior[38]. Supongamos que en dicho sistema se da un proceso a P y T constantes y el sistema intercambia un calor Q con los alrededores, de modo que $Q_{\text{alr}} = -Q$. Para los alrededores tenemos:

$$\Delta S_{\text{alr}} = \frac{-Q}{T} \tag{3.84}$$

El segundo principio aplicado al sistema aislado compuesto por sistema + alrededores dice:

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S + \Delta S_{\text{alr}} = \Delta S + \frac{-Q}{T} \geq 0, \tag{3.85}$$

que a veces se expresa como $\Delta S \geq \frac{Q}{T}$. El signo igual se da para procesos reversibles y entonces $\Delta S = \frac{Q}{T}$ y $\Delta S_{\text{total}} = 0$. De esta manera ΔS_{total} es una medida de cómo de irreversible es un proceso y recibe habitualmente el nombre de **producción de entropía**.

Para procesos a presión constante hemos visto al hablar de la entalpía que $Q = \Delta H$ por lo que podemos escribir (3.85) como

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S + \frac{-\Delta H}{T} \geq 0 \tag{3.86}$$

donde ahora todo lo que aparece son funciones de estado del sistema. Multiplicando por T tenemos

$$T\Delta S_{\text{total}} = T\Delta S - \Delta H \geq 0, \tag{3.87}$$

donde ya se ve que la cantidad importante es $T\Delta S - \Delta H$. Si definimos $G = H - TS = U + pV - TS$ tenemos para un proceso isóbaro e isotermo:

$$\Delta G = \Delta H - \Delta(TS) = \Delta H - (TS_f - TS_i) = \Delta H - T\Delta S = -T\Delta S_{\text{total}}. \quad (\text{a } T = \text{cte}, p = \text{cte}) \tag{3.88}$$

y por tanto los procesos espontáneos –aquellos que cumplen la segunda ley– son tales que $\Delta S_{\text{total}} \geq 0 \Rightarrow \Delta G \leq 0$. De este modo podemos calcular ΔG, que solo depende de variables del sistema, para comprobar la espontaneidad de los procesos a T y p constantes en sistemas que intercambian energía (Q y/o W) con sus alrededores:

$$\Delta G = -T\Delta S_{\text{total}} = \begin{cases} \text{Espontáneo} & \Leftrightarrow \Delta S_{\text{total}} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta G \leq 0 \\ \text{No espontáneo} & \Leftrightarrow \Delta S_{\text{total}} < 0 \Leftrightarrow \Delta G > 0 \end{cases} \tag{3.89}$$

[38] Aunque es especialmente útil en esos casos, es una función de estado y por tanto su variación se puede calcular conocido el estado final e inicial, independientemente del proceso

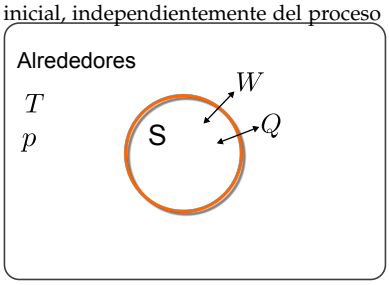


Figura 3.44: **Energía libre de Gibbs**.El sistema S intercambia energía con sus alrededores en procesos a T y p constantes. En esta situación la energía libre de Gibbs resulta especialmente útil. Esto es de hecho lo habitual en muchos procesos biológicos.

El caso $\Delta G = 0$ corresponde a procesos reversibles o en equilibrio. Nótese que el signo de ΔG podría modificarse al cambiar la temperatura en algunos casos. Por último, los procesos no espontáneos ($\Delta G > 0$) se podrían no obstante producir si se acoplan a un segundo proceso 2 que libere suficiente energía libre de forma que $\Delta G_2 + \Delta G \leq 0$. Veamos cómo aplicar todo esto en un ejemplo[39]:

[39] Adaptado por el autor de: Peter Atkins and Julio de Paula. *Physical Chemistry for the Life Sciences*. W. H. Freeman, January 2011

Ejemplo 3.10.8 **Formación del complejo NAD^+ + lactato deshidrogenasa.**

Se sabe experimentalmente que al producirse la unión de la nicotinamida adenina dinucleótido con la enzima lactato deshidrogenasa la variación de entropía vale $\Delta S = -16{,}8\,\mathrm{J/(K\cdot mol)}$ a $T = 25\,^\circ\mathrm{C}$ y pH=7.0 y $p = 1\,\mathrm{bar}$. Al producirse la reacción se libera calor, en concreto, la entalpía de reacción vale $\Delta H = -24{,}2\,\mathrm{kJ/mol}$. El signo negativo de la variación de entropía es esperable puesto que se forma una estructura más agregada y compacta. ¿Cómo es posible entonces que esta reacción se dé espontáneamente (si disminuye la entropía)?

SOLUCIÓN

Según lo explicado en las secciones anteriores, para estudiar la espontaneidad de un proceso es necesario considerar la variación de entropía del sistema *y de sus alrededores*. Alternativamente, para un proceso a T y p constantes también podemos estudiar el signo de ΔG.

a) Utilizando ΔS_{total}:

$$\Delta S_{\text{alr}} = \frac{Q_{\text{alr}}}{T} = \frac{-Q}{T} = \frac{-\Delta H}{T} = \frac{24{,}2\,\mathrm{kJ/mol}}{298\,\mathrm{K}} = 81{,}2\,\mathrm{J/(K\cdot mol)} \Rightarrow \tag{3.10.8.1}$$
$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S + \Delta S_{\text{alr}} = -16{,}8\,\mathrm{J/(K\cdot mol)} + 81{,}2\,\mathrm{J/(K\cdot mol)} = 64{,}4\,\mathrm{J/(K\cdot mol)}$$

Por tanto, $\Delta S_{\text{total}} > 0$ y la reacción es espontánea a esa temperatura.

b) Mediante ΔG

$$G = H - TS \Rightarrow (\text{a } T, p \text{ cte.})\ \Delta G = \Delta H - T\Delta S = -24{,}2\,\mathrm{kJ/mol} + (298\,\mathrm{K})(16{,}8\,\mathrm{J/(K\cdot mol)}) = -19\,\mathrm{kJ/mol}. \tag{3.10.8.2}$$

Dado que $\Delta G < 0$ el proceso es espontáneo.

Interpretación de ΔG como trabajo "útil"

El significado profundo de G se puede comprender en sistemas que verifican procesos a T, p constantes en los que además del trabajo habitual de expansión/compresión $p\Delta V$ existe otro tipo de trabajo W_{otro}:

$$W_{\text{total}} = p\Delta V + W_{\text{otro}} \tag{3.90}$$

donde W_{otro} puede representar el trabajo necesario para algún otro tipo de proceso como puede ser por ejemplo llevar a cabo un reacción

química acoplada, trabajo eléctrico,etc... En este caso, el primer principio dice

$$\Delta U = Q - W = Q - p\Delta V - W_{\text{otro}} \tag{3.91}$$

que llevado a la definición de G, para un proceso a T,p constantes[40]

$$\begin{aligned}\Delta G = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S = Q - p\Delta V - W_{\text{otro}} + p\Delta V - T\Delta S = \\ = Q - T\Delta S - W_{\text{otro}} \Rightarrow W_{\text{otro}} = Q - T\Delta S - \Delta G\end{aligned} \tag{3.92}$$

[40] El resultado es el mismo si partimos de $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ teniendo en cuenta que si hay trabajo W_{otro} entonces $\Delta H = Q - W_{\text{otro}}$ utilizando también el primer principio.

Si el proceso es **reversible**, como hemos visto, $\Delta S = \frac{Q}{T}$ y entonces

$$W_{\text{otro}} = -\Delta G \tag{3.93}$$

lo que significa que $-\Delta G$ corresponde al trabajo, *distinto al de expansión*, que se puede extraer en un proceso reversible o que hay que aportar para verificar el proceso, dependiendo del signo que tenga.

Para procesos **irreversibles**, $\Delta S \geq \frac{Q}{T}$ y entonces

$$W_{\text{otro}} \leq -\Delta G. \tag{3.94}$$

Puesto que W_{otro} es positivo si lo hace el sistema, significa que si ΔG es negativo (el proceso libera energía para usarla) el trabajo máximo que se puede extraer es $-\Delta G$. Si por el contrario el proceso consume energía $\Delta G > 0$ entonces el trabajo que tenemos que poner nosotros W_{otro} es al menos ΔG para lograr que se verifique el proceso[41]. Si una reacción química (a T, p ctes.) libera energía, por ejemplo, $\Delta G = -8\,\text{J}$ entonces el trabajo útil que se puede hacer con esa energía es como mucho 8 J. Si la reacción necesitara $\Delta G = 8\,\text{J}$ para producirse, tendría que acoplarse a otra que produzca al menos $\Delta G = 8\,\text{J}$. Veamos un par de ejemplos[42]

[41] Como ya se ha dicho antes, ese trabajo puede venir de una reacción por ejemplo que tenga $\Delta G < 0$ y que se dé de forma acoplada.

[42] Adaptados de Peter Atkins and Julio de Paula. *Physical Chemistry for the Life Sciences*. W. H. Freeman, January 2011

Ejemplo 3.10.9 Hidrólisis del ATP

La reacción de hidrólisis del ATP en condiciones de $pH = 7$ y $T = 37\,^{\circ}\text{C}$:

$$\text{ATP}^{4-}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \longrightarrow \text{ADP}^{3-}(\text{aq}) + \text{HPO}_4{}^{2-}(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^{+}(\text{aq}) \tag{3.10.9.1}$$

tiene las siguientes valores de entalpía y energía libre de reacción:

$$\begin{aligned}\Delta H = H_{\text{prod}} - H_{\text{react}} = -20\,\text{kJ/mol} \\ \Delta G = G_{\text{prod}} - G_{\text{react}} = -31\,\text{kJ/mol}\end{aligned} \tag{3.10.9.2}$$

La reacción tiene una $\Delta S > 0$ puesto que el efecto neto es que se rompe una molécula, lo que da más posibles configuraciones en el espacio. Esto significa que la reacción produce 20 kJ/mol de calor si se da a presión constante, pero que pueden llegar a aprovecharse hasta 31 kJ/mol –debido al término entrópico ($-T\Delta S$)– para realizar alguna tarea útil dentro de la célula, ya descontado el posible trabajo de expansión.

Ejemplo 3.10.10 Oxidación de la glucosa

Otras veces el efecto de considerar $T\Delta S$ es más pequeño. En el caso de la glucosa a $T = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$ $p = 1\,\mathrm{bar}$ tenemos que

$$\mathrm{C_6H_{12}O_6} + 6\,\mathrm{O_2} \longrightarrow 6\,\mathrm{CO_2} + 6\,\mathrm{H_2O} \tag{3.10.10.1}$$

produce $\Delta H = -2808\,\mathrm{kJ/mol}$ y $\Delta G = -2828\,\mathrm{kJ/mol}$, menos de 1 % de diferencia. Por cierto, con estos datos, ¿podemos calcular ΔS para la reacción de glucosa? ¿Qué estado tiene mayor entropía, productos o reactivos?

SOLUCIÓN

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S \Rightarrow \Delta S = \frac{\Delta H - \Delta G}{T} = \frac{-2808\,\mathrm{kJ/mol} + 2828\,\mathrm{kJ/mol}}{(273+25)\mathrm{K}} = 67\,\mathrm{J/(K\cdot mol)} \tag{3.10.10.2}$$

Como $\Delta S = S_{\mathrm{prod}} - S_{\mathrm{react}} > 0$, los productos tienen mayor entropía, lo que es consistente con que son moléculas aparentemente más sencillas.

Ejemplo 3.10.11 Estimación de ΔG en un proceso metabólico

Un pájarillo de 30 g vuela desde el suelo a una rama a 10 m por encima. Utilizando la energía liberada por la glucosa $\Delta G_{\mathrm{molar}} = -2828\,\mathrm{kJ/mol}$ calcule la masa mínima de glucosa necesaria para realizar dicha tarea. La fórmula de la glucosa es $\mathrm{C_6H_{12}O_6}$

SOLUCIÓN

El trabajo es el necesario para incrementar la energía potencial del pajarillo de masa m:

$$W_{\mathrm{otro}} = mgh = (30\times 10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(10\,\mathrm{m}) \tag{3.10.11.1}$$

Si la oxidación de 1 mol de glucosa produce $\Delta G_{\mathrm{molar}}$, entonces n moles producen $\Delta G = n\Delta G_{\mathrm{molar}}$ y esa energía producida en la oxidación es la que se utiliza para realizar el trabajo mecánico (recuérdese el cambio de signo entre ΔG y W_{otro}):

$$W_{\mathrm{otro}} = -n\Delta G_{\mathrm{molar}} \Rightarrow n = \frac{-W_{\mathrm{otro}}}{\Delta G_{\mathrm{molar}}}. \tag{3.10.11.2}$$

Finalmente, una vez conocidos los moles n necesarios, la masa total de glucosa se haya multiplicando por la masa de 1 mol de glucosa $M = 180\,\mathrm{g/mol}$

$$m_g = nM = \frac{-W_{\mathrm{otro}}}{\Delta G_{\mathrm{molar}}}M = \frac{-(30\times 10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(10\,\mathrm{m})}{-2828\times 10^{3}\,\mathrm{J/mol}} \times 180\,\mathrm{g/mol} \simeq 0{,}19\,\mathrm{mg} \tag{3.10.11.3}$$

Energía libre y producción de entropía

Consideremos de nuevo un sistema en contacto con alrededores a T y p constantes que puede realizar un trabajo de otro tipo W_{otro}

además del de expansión. Recuperando lo que vimos en la sección anterior, el cambio de energía libre es en general:

$$\Delta G = Q - T\Delta S - W_{\text{otro}} \Rightarrow \Delta S - \frac{Q}{T} = \frac{-\Delta G - W_{\text{otro}}}{T} \tag{3.95}$$

Recordando que la producción de entropía es (en este caso de un sistema y unos alrededores) $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S - \frac{Q}{T}$ encontramos

$$\Delta S_{\text{total}} = \frac{-\Delta G - W_{\text{otro}}}{T} \geq 0 \tag{3.96}$$

que tiene que ser positivo o nulo según el segundo principio[43]. Veamos cómo se interpreta esta fórmula. Supongamos que un sistema consume algo de su energía libre que tiene guardada en forma por ejemplo de enlaces químicos, rompiendo un enlace. En ese caso $\Delta G < 0$ y como hemos visto antes también, el trabajo que puede realizar es $W_{\text{otro}} = -\Delta G$ como mucho. Si se efectúa todo ese trabajo, no habrá producción de entropía $\Delta S_{\text{total}} = 0$, el proceso es reversible. Si se utiliza solo una parte de la energía libre consumida para hacer un trabajo, el resto se pierde[44], la entropía producida es positiva y el proceso irreversible. Así, podemos ver que la producción de entropía nos da una idea de cómo de eficiente es la conversión de energía libre en trabajo. De hecho podemos definir una eficiencia como la relación entre el trabajo realmente realizado y la energía libre disponible:

$$\eta = \frac{W_{\text{otro}}}{|\Delta G|} \tag{3.97}$$

La segunda ley implica que $W_{\text{otro}} \leq -\Delta G$ de modo que la eficiencia de conversión no puede ser mayor de 1. Los motores moleculares que operan dentro de las células pueden consumir energía libre almacenada en los enlaces químicos del ATP o GTP (como hemos visto en el ejemplo de la hidrólisis del ATP) y realizar un trabajo mecánico, pero su eficiencia está limitada por la segunda ley.

[43] Nótese que si tomamos $W_{\text{otro}} = 0$ recuperamos la forma anterior $-\Delta G = T\Delta S_{\text{otro}} \geq 0$ que teníamos antes de considerar el trabajo extra, por ejemplo en la ecuación (3.88)

[44] Se suele decir que se disipa

Ejemplo 3.10.12 Eficiencia de la respiración celular

A partir de los datos de ejemplos anteriores para la energía libre proporcionada por la oxidación de la glucosa $\Delta G_{\text{glu}} = -2828\,\text{kJ/mol}$ y la de la hidrólisis del ATP $\Delta G_{\text{ATP}} = -31\,\text{kJ/mol}$, calcule la eficiencia de la respiración celular si consideramos que por cada molécula de glucosa se producen en torno a 32 moléculas de ATP.

SOLUCIÓN

De la cantidad de energía libre que se libera en la oxidación de la glucosa, una parte se empleará en la síntesis de ATP, y el resto se disipará. La energía utilizada en la síntesis de un mol de ATP es la misma de la hidrólisis pero con signo positivo. La eficiencia será la relación entre la energía que se almacena en el ATP realmente y la que se liberó. Igualmente, será también la relación entre el número de moléculas

sintetizadas realmente (n_{ATP}) y las que se podría sintetizar si se emplease toda la energía de la glucosa y no se disipara nada. Podemos utilizar energías por mol o por molécula, mientras expresemos la energía de la glucosa y del ATP en las mismas unidades. Así, escribimos

$$\eta = \frac{n_{\text{ATP}}\Delta G_{\text{ATP}}}{|\Delta G_{\text{glu}}|} = \frac{32 \times 31\,\text{kJ/mol}}{2828\,\text{kJ/mol}} \simeq 0{,}35 = 35\,\% \qquad (3.10.12.1)$$

que no es excesivamente alto, siendo similar a las eficiencias de motores de combustión, aunque los mecanismos de conversión son completamente diferentes. De todas formas, el calor disipado se utiliza al menos en parte para mantener la temperatura del cuerpo. Por otra parte, en condiciones fisiológicas, ΔG_{ATP} puede ser mayor que el valor en condiciones estándar usado.

3.11 *Fluctuaciones*

En la sección 3.5 hemos visto como no todas las partículas en un gas a una T tiene la misma velocidad (y por tanto la misma E_c), si no que existe una distribución, la distribución de Maxwell. Es un caso particular de un principio más general que establece que, en un sistema en equilibrio a T, la fracción de partículas que tienen una determinada energía E es proporcional a un factor exponencial[45]. La fracción de partículas con energía E o equivalentemente la probabilidad de encontrar 1 partícula con energía E es

$$\text{Prob}(E) \propto e^{-\frac{E}{kT}} \qquad (3.98)$$

k es la constante de Boltzmann. En cierto sentido puede decirse que la distribución es el resultado del equilibrio de dos tendencias, las de las partículas a disminuir su energía y la de la agitación térmica que tiende a mantenerlas en movimiento. Veamos algunas consecuencias interesantes.

[45] conocido como factor de Boltzmann

Fórmula barométrica

Un ejemplo concreto de ese equilibrio de tendencias es la distribución de un gas sometido a la acción de la gravedad. Es bien conocido que la densidad del aire desciende con la altura (ver figura 3.45). La gravedad tiende a acumular las moléculas del gas cerca del suelo (donde tienen menor energía potencial) mientras que la acción de la agitación térmica tiende a homogeneizar la densidad. El resultado, en equilibrio, lo podemos encontrar utilizando el factor de Boltzmann. La energía de 1 molécula de masa $m_{\text{molécula}}$ en el campo gravitatorio es $m_{\text{molécula}}gz$ donde z es la altura desde el nivel del suelo. La densidad de moléculas a cada altura z será proporcional a la probabilidad de encontrar de una molécula con una energía $m_{\text{molécula}}gz$, es decir:

$$\rho(z) \propto Prob(z) \propto e^{-\frac{m_{\text{molécula}}gz}{kT}} \qquad (3.99)$$

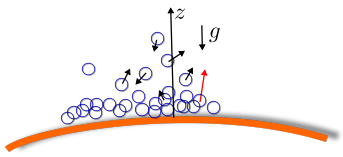


Figura 3.45: **Variación de la presión con la altura** z. La densidad del aire en la atmósfera disminuye con la altura de forma exponencial. Es el resultado del balance de dos tendencias, la de la gravedad, a acumular las partículas abajo y la agitación térmica que tiende a dispersarlas en todas direcciones.

La constante de proporcionalidad se fija sabiendo que a $z = 0$ tenemos una cierta densidad ρ_0:

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{m_{\text{molécula}} gz}{kT}}. \tag{3.100}$$

Si se trata de un gas ideal, podemos relacionar densidades y presiones ya que

$$PV = NkT \Rightarrow P = \frac{N}{V}kT = \rho kT, \tag{3.101}$$

con $\rho = \frac{N}{V}$ en mol/m^3. Por tanto, P y ρ son proporcionales, así que podemos escribir:

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{m_{\text{molécula}} gz}{kT}}. \tag{3.102}$$

con P_0 la presión a nivel $z = 0$. A ésta se la conoce como fórmula barométrica y expresa la P a una altura z conocida la presión a $z = 0$.

Ley de Nernst

Otro ejemplo de este equilibrio de tendencias sucede en el caso de tener de las **membranas biológicas**. Las membranas de las células presentan cargas que generan un campo eléctrico y por tanto una diferencia de potencial entre el exterior y el interior en torno a unos $-70\,\text{mV}$[46].

Un ión de carga Q tiene una energía eléctrica asociada proporcional al potencial eléctrico[47] y a la carga, que es diferente en el interior y el exterior de la célula debido a la diferencia de potencial eléctrico:

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= qV_{\text{ext}} \\ E_{\text{int}} &= qV_{\text{int}} \end{aligned} \tag{3.103}$$

Debido a la acción del campo eléctrico los iones tienden a situarse en el interior o exterior de forma que minimicen su energía eléctrica. Por otro lado, la agitación térmica o la difusión tiende a homogeneizar las concentraciones. En el equilibrio, si el ión puede atravesar la membrana sin dificultad, el flujo producido por ambos efectos se equilibra y no existe flujo neto. La diferencia de potencial $V^N_{\text{int}} - V^N_{\text{int}}$ para la que se alcanza el equilibrio para unas determinadas concentraciones interna $[\text{ion}]_{\text{int}}$ y externa $[\text{ion}]_{\text{ext}}$ se denomina potencial de Nernst. Se puede calcular suponiendo de nuevo que la probabilidad de encontrar un ion dentro o fuera de la membrana es exponencial, y que la concentración es proporcional a esta probabilidad:

$$\text{Prob}(E) \propto e^{-\frac{E}{kT}} \Rightarrow \begin{cases} [\text{ion}]_{\text{ext}} \propto e^{\frac{-E_{\text{ext}}}{kT}} = e^{\frac{-qV^N_{\text{ext}}}{kT}} \\ [\text{ion}]_{\text{int}} \propto e^{\frac{-E_{\text{int}}}{kT}} = e^{\frac{-qV^N_{\text{int}}}{kT}} \end{cases} \tag{3.104}$$

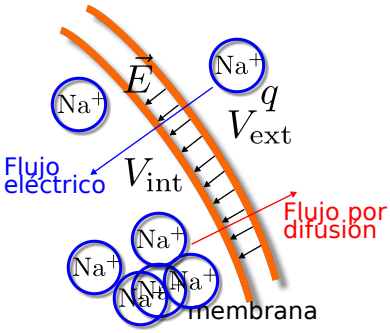


Figura 3.46: **Ecuación de Nernst.** Un ion con carga q tiene distinta energía eléctrica dentro que fuera de la célula debido a la diferencia de potencial de membrana y tendrá tendencia a desplazarse hacia menor energía. Por otro lado, la difusión tiende a igualar concentraciones.

[46] El valor es ciertamente muy variable e incluso puede llegar a ser positivo, pero esto no es importante para esta discusión

[47] Veremos esto con detalle en el tema siguiente, aunque debería ser más o menos conocido

donde hemos utilizado (3.103). La fracción será:

$$\frac{[\text{ion}]_{\text{ext}}}{[\text{ion}]_{\text{int}}} = \frac{e^{\frac{-qV_{\text{ext}}^N}{kT}}}{e^{\frac{-qV_{\text{int}}^N}{kT}}} = e^{-q(V_{\text{ext}}^N - V_{\text{int}}^N)} \tag{3.105}$$

Tomando logaritmos:

$$V_{\text{ext}}^N - V_{\text{int}}^N = -\frac{kT}{q}\log\frac{[\text{ion}]_{\text{ext}}}{[\text{ion}]_{\text{int}}} \Rightarrow \tag{3.106}$$

$$V_{\text{int}}^N - V_{\text{ext}}^N = \frac{kT}{q}\log\frac{[\text{ion}]_{\text{ext}}}{[\text{ion}]_{\text{int}}} \tag{3.107}$$

q es la carga del ion con su signo, y el log es neperiano. Utilizaremos esta ecuación para estudiar la transmisión del impulso nervioso.

Equilibrio químico

Ciertas reacciones químicas necesitan que los reactivos interaccionen con suficiente energía como para superar una barrera energética, antes de proseguir hasta convertirse en productos, tal como se muestra en la figura 3.47. La energía necesaria la pueden obtener de la energía cinética contenida en las partículas por el hecho de estar a T. Considerando el estado de transición, la energía necesaria para moverse hacia la derecha (hacia productos) será:

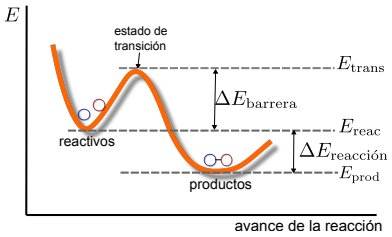


Figura 3.47: **Perfil energético de una reacción química**. Los reactivos han de superar una cierta barrera de energía antes de convertirse en productos

$$E_{\rightarrow} = E_{\text{trans}} - E_{\text{reac}} = \Delta E_{\text{barrera}} \tag{3.108}$$

La reacción avanza hacia los productos a un ritmo proporcional a la fracción de (o probabilidad de encontrar) átomos o moléculas de reactivos que tengan energía mayor a la necesaria para avanzar. La probabilidad o fracción de átomos con energía suficiente es exponencial:

$$P_{\rightarrow} \propto e^{-\frac{E_{\rightarrow}}{kT}} \tag{3.109}$$

y entonces el ritmo $k_{\rightarrow}$ al que reaccionan es

$$k_{\rightarrow} \propto [\text{reac}]e^{-\frac{E_{\rightarrow}}{kT}}, \tag{3.110}$$

con [reac] la concentración de los reactivos. Análogamente, para la reacción inversa, la energía necesaria es $E_{\leftarrow} = E_{\text{trans}} - E_{\text{prod}}$. La velocidad de reacción inversa $k_{\leftarrow}$ será

$$k_{\leftarrow} = [\text{prod}]e^{-\frac{E_{\leftarrow}}{kT}}. \tag{3.111}$$

En el equilibrio químico se cumple

$$k_{\leftarrow} \propto k_{\rightarrow} \Rightarrow \frac{[\text{prod}]}{[\text{reac}]} = e^{-\frac{(E_{\rightarrow} - E_{\leftarrow})}{kT}} \tag{3.112}$$

Con la definición habitual de energía de reacción $\Delta E_{\text{reaccion}} = E_{\text{prod}} - E_{\text{reac}}$ tenemos

$$\Delta E_{\text{reaccion}} = E_{\text{prod}} - E_{\text{reac}} = E_{\text{prod}} - E_{\text{trans}} + E_{\text{trans}} - E_{\text{reac}} = E_{\rightarrow} - E_{\leftarrow} \tag{3.113}$$

de donde

$$\frac{[\text{prod}]}{[\text{reac}]} = e^{\frac{-\Delta E_{\text{reaccion}}}{kT}} \text{(equilibrio)} \tag{3.114}$$

Por ejemplo, si la energía de reacción $\Delta E_{\text{reaccion}} < 0$ (como en la figura 3.47), la reacción está desplazada en el equilibrio hacia mayor concentración de productos. La T alta tiende a igualar las concentraciones en general.

4
Electricidad

4.1 ¿De qué trata el capítulo?

La conexión entre electricidad y vida es muy estrecha. Algunas de las observaciones que las relaciona se remontan a los experimentos de Galvani en el siglo XVIII sobre la naturaleza eléctrica del impulso nervioso o la constatación en la antigüedad de la existencia de peces eléctricos.[1]

[1] Parece ser que los experimentos de Galvani inspiraron a Mary Shelley para la escritura de Frankenstein. Sin llegar a esos extremos, la relación entre electricidad y vida es sin duda muy estrecha

Por poner algunos ejemplos, podemos citar que las interacciones de biomoléculas como los fosfolípidos de las membranas, las que dominan el plegamiento de proteínas o la conformación del ADN son, en última instancia, eléctricas. A una escala mayor, el transporte de iones a través de membrana, el potencial de membrana y el potencial de acción son fenómenos eléctricos. Los sensores que proporcionan los sentidos a los animales convierten las diferentes señales que detectan en un impulso eléctrico (electroquímico) que se transmite al cerebro. Finalmente, algunos animales tienen directamente sensores de campo eléctrico que detectan las débiles corrientes que generan otros animales.

En este capítulo, dedicaremos una sección especial al análisis de la transmisión del impulso nervioso, un tema clásico de la biofísica.

4.2 Carga eléctrica. Conservación de la carga

Existen 2 tipos de carga eléctrica, que llamamos positiva y negativa.

2 tipos de carga: + y -

Frotando algunos objetos podemos poner de manifiesto la carga. Lo que sucede es que se transfiere algo de carga de un objeto al otro y ambos quedan cargados. Aparece una fuerza entre ellos ya que las cargas de distinto signo sufren una atracción. Las cargas de igual signo sufren una fuerza repulsiva. Aunque las cargas se pueden transferir, está bien establecido el principio de conservación de la

carga:

En cualquier proceso, la carga total se mantiene constante,

entendiendo como carga total la suma (con su signo) de todas las cargas presentes en el fenómeno estudiado. Por ejemplo, si frotamos dos objetos eléctricamente neutros (inicialmente ninguno tiene carga) se puede transmitir carga de uno a otro, pero siempre de manera que la carga negativa de uno sea igual a la positiva del otro (figura 4.1).

En los átomos que conforman la materia que vemos, la carga positiva se encuentra en el núcleo, en los protones, y la negativa en los electrones:

$$\begin{matrix}\text{protón: } +e \\ \text{electrón: } -e\end{matrix} \quad \text{con } e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}$$

siendo e la carga más pequeña que puede existir libremente, conocida como *carga fundamental*. La unidad de la carga en el sistema internacional es el Coulomb (símbolo C) y lo definiremos más tarde.

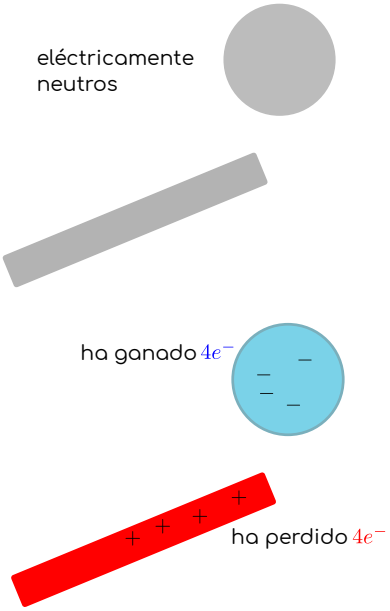


Figura 4.1: Conservación de la carga. Arriba: objetos sin carga inicial o $Q_{\text{total}} = 0$. Abajo: los objetos se cargan uno con $+4e$ y otro con $-4e$ de modo que la carga total sigue siendo la misma que antes $Q_{\text{total}} = +4e - 4e = 0$.

Conductores y aislantes

Algunos materiales conducen (dejan fluir, transmiten) fácilmente la carga eléctrica a su través y otros no. Los llamamos conductores y aislantes (figura 4.2).

Los metales tienen sus electrones poco ligados a los núcleos y muy móviles, por lo que en general son muy buenos conductores. Volveremos a este tema de forma más precisa cuando veamos la resistencia eléctrica.

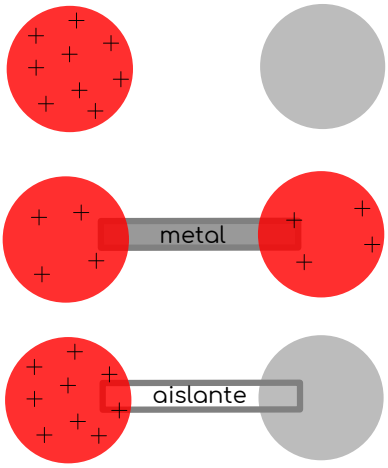


Figura 4.2: Conductores y aislantes. Arriba: Situación inicial, un objeto cargado y otro neutro. Medio: al ponerlos en contacto mediante un buen conductor, la carga se puede transmitir de uno a otro. Abajo: los aislantes no dejan fluir la carga a su través.

4.3 *Fuerza entre cargas. Ley de Coulomb*

Como toda fuerza, la fuerza eléctrica entre dos cargas tiene módulo, dirección y sentido.

Módulo de la fuerza

Dos cargas eléctricas, Q_1 y Q_2 de distinto signo se atraen (o si son de igual signo se repelen) con una fuerza de módulo

$$F = \frac{k|Q_1||Q_2|}{r^2} \tag{4.1}$$

con

- Q_1 y Q_2, las cargas respectivas en C
- r la distancia que las separa, en m

- la constante de Coulomb k que depende del medio en el que se encuentran las cargas, por ejemplo en el vacío $k = 9 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

Lo que significa más precisamente es que la carga 1 ejerce una fuerza sobre la carga 2 de módulo dado por (4.1), igual en módulo a la fuerza que la carga 2 ejerce sobre la carga 1, según nos dice la 3ª ley de Newton.

Dirección

Las fuerzas eléctricas apuntan en la dirección de la línea que une las posiciones de las dos cargas.

Sentido

Si las dos cargas son de signo contrario, las partículas se atraen, por lo que la carga 1 ejerce una fuerza sobre la 2 que apunta hacia la carga 1 y trata de acercarla hacia sí. Igualmente, por la 3ª ley de Newton, la fuerza que 2 ejerce sobre 1 es desde 1 hacia 2. Como vectores

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4.2}$$

donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que 1 ejerce sobre 2 y $\vec{F}_{21}$ la que 2 ejerce sobre 1. En caso de cargas de igual signo, las fuerzas apuntan en sentidos contrarios a estos, de forma que tienden a separar las cargas. Esto se resume en la figura (4.3)

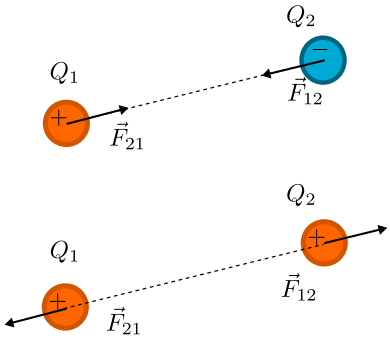


Figura 4.3: Arriba: fuerzas entre cargas de distinto signo. Abajo: fuerzas entre cargas de igual signo. En ambos casos, $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que la carga 1 hace sobre la carga 2 y $\vec{F}_{21}$ la fuerza que ejerce 2 sobre 1. Nótese que las fuerzas se pintan sobre los objetos que las sienten.

4.4 *Ley de Coulomb vectorial*

Todo lo explicado en la sección anterior sobre la fuerza de Coulomb se puede resumir en una sola fórmula, sencilla de "construir". Vamos a encontrar la expresión para la fuerza que ejerce la carga Q_1 sobre una carga Q_2 colocada en una posición diferente. Se basa en el concepto de *vector unidad*, que es un vector que apunta en una cierta dirección que nos interesa y tiene módulo uno. La fuerza eléctrica tiene la dirección que une las dos cargas, así que construyamos un vector unidad en esa dirección. Supongamos que la carga Q_1 está en una posición dada por $\vec{r}_1$ como en la figura (en el plano, sus coordenadas serán algo como $\vec{r}_1 = (2,3)\mathrm{m}$ o $\vec{r}_1 = (-1,5)\mathrm{m}$ o algo así). La carga Q_2 está en la posición $\vec{r}_2$. El vector que va desde el punto de coordenadas $\vec{r}_1$ al punto $\vec{r}_2$ tiene la dirección que nos interesa, y se calcula fácilmente:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{4.3}$$

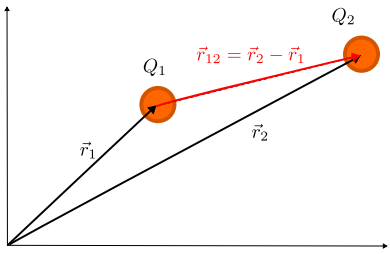


Figura 4.4: El vector $\vec{r}_{12}$ es el vector que va desde la posición de la carga 1 a la de la carga 2. Es un vector que marca la dirección de la fuerza entre las cargas.

Además el módulo de este vector $|\vec{r}_{12}|$ es la distancia que separa las cargas. Con él podemos construir fácilmente un vector unidad en esa dirección. Si dividimos $\vec{r}_{12}$ por su módulo, el vector resultante tiene módulo unidad:

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} \Rightarrow |\vec{u}_{12}| = \frac{|\vec{r}_{12}|}{|\vec{r}_{12}|} = 1 \tag{4.4}$$

y por supuesto sigue apuntando en la misma dirección y sentido que $\vec{r}_{12}$.

Utilizando el vector unidad $\vec{u}_{12}$ es fácil escribir la ley de Coulomb en su forma vectorial. La fuerza de Coulomb que la carga 1 ejerce sobre 2 entonces es:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\vec{u}_{12} \tag{4.5}$$

Es muy importante fijarse en lo siguiente. Por un lado, la fuerza $\vec{F}_{12}$ tiene el módulo dado por la ley de Coulomb. En efecto, tomando el módulo

$$|\vec{F}_{12}| = k\frac{|Q_1 Q_2|}{|\vec{r}_{12}|^2}|\vec{u}_{12}| = k\frac{|Q_1||Q_2|}{|\vec{r}_{12}|^2} \tag{4.6}$$

donde el valor absoluto en las cargas se debe a que el módulo es una cantidad siempre positiva y hay que recordar que $|\vec{r}_{12}|^2$ es la distancia que separa las cargas al cuadrado, como establece la ley de Coulomb. Por otro, el vector $\vec{F}_{12}$ tiene la misma dirección de $\vec{u}_{12}$ ya que es un número multiplicado por dicho vector. Finalmente, si se introducen correctamente los signos de las cargas, $\vec{F}_{12}$ tiene además el sentido correcto:

- cargas del mismo signo: $Q_1 Q_2 > 0$ y $\vec{F}_{12}$ apunta hacia el mismo sentido de $\vec{u}_{12}$, esto es, desde 1 hacia 2 (1 repele la carga 2).
- cargas de signo contrario: $Q_1 Q_2 < 0$ y $\vec{F}_{12}$ apunta hacia el sentido contrario de $\vec{u}_{12}$, esto es, desde 2 hacia 1 (1 atrae la carga 2).

como se observa en la figura 4.5.

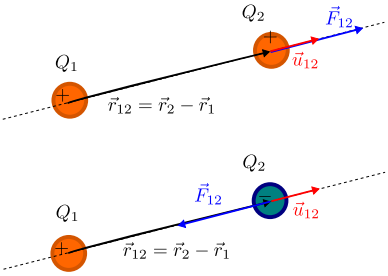


Figura 4.5: Arriba: la fuerza que ejerce 1 sobre 2 lleva la dirección de $\vec{u}_{12}$ y el mismo sentido. Abajo: la fuerza que ejerce 1 sobre 2 lleva la dirección de $\vec{u}_{12}$ y sentido contrario

Para acabar, la manera más compacta de escribirlo todo es sustituir el valor de $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ y obtener para dos cargas situadas en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12}, \text{ con } \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{4.7}$$

La fuerza que ejerce 2 sobre 1 se podría calcular de igual forma teniendo en cuenta que ahora hay que usar el vector $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y ver que el resultado es

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{4.8}$$

como predice la 3ª ley de Newton.

Ejemplo 4.4.1 **Ley de Coulomb vectorial**

Una carga $Q_1 = 6\,\mu C$ se encuentra en la posición (1,2) dada en metros. Otra carga se encuentra en (5,5)m y tiene un valor de $Q_2 = -4\,\mu C$. Calcule la fuerza que ejerce 1 sobre 2 y la fuerza de 2 sobre 1 en el vacío.

Datos: k=$9 \times 10^9\,N \cdot m^2/C^2$

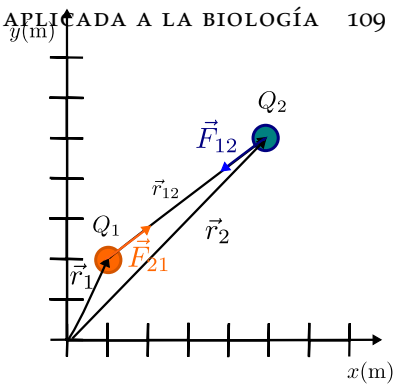


Figura 4.6: Disposición de las cargas del ejemplo.

SOLUCIÓN

Primero calculamos el vector que une las cargas

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (5,5) - (1,2) = (5-1, 5-2) = (4,3)\text{m} \tag{4.4.1.1}$$

y su módulo

$$|\vec{r}_{12}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5\text{m} \tag{4.4.1.2}$$

que es la distancia que las separa. Calculamos ahora la fuerza con la fórmula (4.7):

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12} = k\frac{(6\,\mu C)(-4\,\mu C)}{(5\,m)^3}(4,3) \simeq -0{,}0017(4,3) = (-0{,}0069, -0{,}0052)\text{N} = (-6{,}9, -5{,}2)\text{mN} \tag{4.4.1.3}$$

que son las coordenadas del vector. Ambas coordenadas son negativas, como corresponde a un vector que apunta hacia abajo a la izquierda según los ejes de la figura 4.6.

La fuerza que ejerce la carga 2 sobre la carga 1 se calcula de forma análoga o directamente:

$$F_{21} = -F_{12} = -(-6{,}9, -5{,}2)\text{mN} = (6{,}9\ ,\ 5{,}2)\text{mN} \tag{4.4.1.4}$$

también representada en la figura.

La constante dieléctrica

La ley de Coulomb se expresa con una constante delante k

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{4.9}$$

que vale en el sistema internacional y para el vacío $k = 9 \times 10^9\,N \cdot m^2/C^2$ y tiene otros valores en diferentes medios como el agua, aceite, etc. Otra manera equivalente de expresar esa constante es mediante la permitividad del vacío ϵ_0, así

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{4.10}$$

Comparando ambas expresiones, tenemos

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \simeq 8{,}85 \times 10^{-12}\,C^2/(N \cdot m^2) \tag{4.11}$$

Cuando las cargas se encuentran en otro medio que no es el vacío, como el agua, la fuerza eléctrica se apantalla[2] de forma que la constante es diferente. Por ejemplo, en lugar de ϵ_0 tendremos una ϵ de mayor valor y la fuerza pasa a ser

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{4.12}$$

o lo correspondiente en su forma vectorial. La manera habitual de dar el valor de ϵ es de forma indirecta, mediante la constante dieléctrica del medio que es

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{4.13}$$

Por ejemplo, para el agua tenemos que $K = 80{,}4$ y por tanto[3]

$$\epsilon = \epsilon_0 K = 80{,}4\epsilon_0 \tag{4.14}$$

y la ley de Coulomb en el agua queda

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{80{,}4 \times 4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{4.15}$$

es decir, las fuerzas eléctricas son en agua unas 80 veces más débiles que en el vacío, a igualdad de cargas y distancias.

[2] Debido a las cargas presentes en el medio, lo veremos luego tras hablar del campo eléctrico en los medios dieléctricos

[3] No confundir la constante dieléctrica K con la constante de la ley de Coulomb k

4.5 *Campo eléctrico*

El campo eléctrico es una idea útil en física y muchas ramas de la ciencia. Una vez calculado el campo, permite olvidarse de las cargas que lo generan y centrarse en el efecto sobre las cargas que lo experimentan.

El campo eléctrico en cada punto del espacio se define como la fuerza eléctrica (por unidad de carga) que sentiría una pequeña carga de prueba situada en ese punto[4]. Matemáticamente,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{4.16}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza que siente la carga q[5]. Es un vector definido en todo punto del espacio alrededor de una o varias cargas. Sus unidades son

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = 1\,\mathrm{N/C} \tag{4.17}$$

Una vez establecido un campo creado por una o por múltiples cargas en un punto del espacio, si situamos otra carga q' en ese punto, ésta sentirá una fuerza dada por

$$\vec{F}(\text{sobre } q') = q'\vec{E} \tag{4.18}$$

[4] Por el efecto de otras cargas preexistentes en una zona cercana

[5] Como es independiente de la carga de prueba que se pone, suele ser lo más fácil pensar en que ponemos una carga positiva de prueba

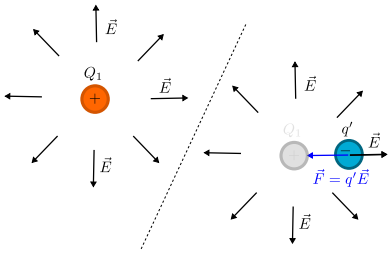


Figura 4.7: Izquierda: La carga Q_1 establece un campo $\vec{E}$ en todo punto del espacio. Derecha: Una nueva carga q' situada donde existe un campo $\vec{E}$ siente una fuerza $q'\vec{E}$, independientemente de qué carga o cargas lo hayan creado.

Como se ve, la idea de campo eléctrico separa la interacción eléctrica en dos partes, por un lado existen cargas que generan campo eléctrico en el espacio. Después, cuando otras cargas se sitúan en algún punto del espacio donde existe un campo eléctrico, surge una fuerza sobre estas nuevas cargas debida al campo (figura 4.7).

Campo creado por una carga puntual

Empecemos calculando el campo creado por una carga puntual de valor Q en un punto del espacio. Para simplificar, situamos nuestro origen de coordenadas encima de la carga Q que crea el campo. Calculemos el campo que genera en un punto situado en las coordenadas $\vec{r}$, como en la figura 4.8. Para ello colocamos una carga test q en el punto de coordenadas $\vec{r}$. La fuerza que siente, según (4.7) (tomando $\vec{r}_1 = 0$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}$) es

$$\vec{F} = kQq\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{4.19}$$

y de la definición de campo

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = kQ\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \left(\text{ o bien, } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \tag{4.20}$$

Recordando el vector unitario, en este caso $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ vemos que el campo creado por una carga Q en un punto situado en la posición $\vec{r}$ respecto de ella, tiene

- la dirección de la linea que une la carga y el punto donde estamos hallando el campo (dada por el vector $\vec{r}$). Es radial.
- módulo $|\vec{E}| = \frac{k|Q|}{|\vec{r}|^2}$. Recuerde que $|\vec{r}|$ es la distancia entre el punto y la carga.
- tiene sentido "hacia afuera" (el mismo que $\vec{r}$) si la carga Q es positiva y sentido "hacia la carga" (sentido contrario a $\vec{r}$) si la carga Q es negativa.

Todo esto se resume en las figuras 4.9 y 4.10.

Finalmente, si tuviéramos la carga Q en un punto $\vec{r}_1$ que no sea el origen de coordenadas, haciendo el mismo proceso, llegamos a

$$\vec{E} = kQ\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \tag{4.21}$$

donde la carga que crea el campo Q está en $\vec{r}_1$ y el punto donde calculamos el campo en $\vec{r}_2$ e igual que antes $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, como en la figura 4.11. Esta expresión es útil si tenemos varias cargas en diferentes sitios y queremos calcular el campo total, como en la siguiente sección.

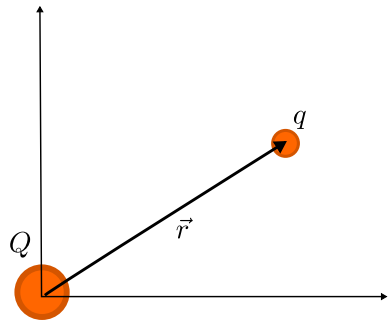


Figura 4.8: Para calcular el campo creado por Q en un punto del espacio, situamos una carga de prueba en el punto, medimos la fuerza. El campo es el resultado de la fuerza dividido por la carga q.

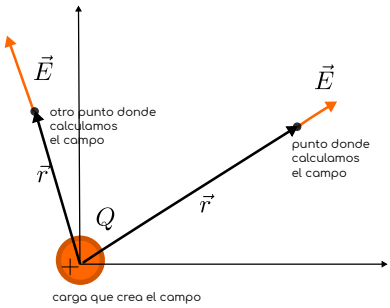


Figura 4.9: El campo creado por una carga positiva es radial y hacia afuera y decrece con el cuadrado de la distancia a la carga.

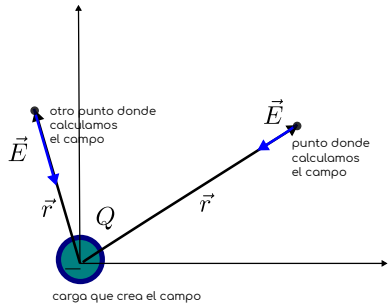


Figura 4.10: El campo creado por una carga negativa es radial, apunta hacia la carga, y decrece con el cuadrado de la distancia a la carga.

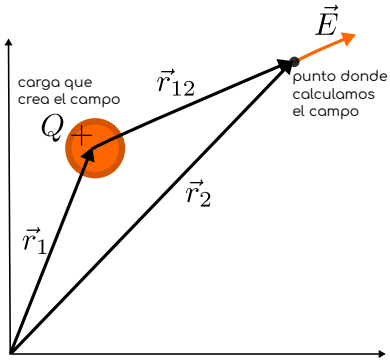


Figura 4.11: Los vectores necesarios para calcular el campo creado por una carga que no está situada en el origen de coordenadas

Superposición de campos

Además, en caso de que haya varias cargas que generan el campo, puesto que las fuerzas se suman vectorialmente, el campo total generado por varias cargas en un mismo punto es la suma de los campos que crea cada una de ellas por separado

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \tag{4.22}$$

Campo creado por placa plano paralelas

Un objeto cualquiera, una esfera, un plano, un bolígrafo, una célula, una proteína, puede en algún caso tener carga eléctrica no nula. Las cargas eléctricas se distribuyen en el objeto[6] y crea un campo eléctrico a su alrededor que será la suma (vectorial) de los campos creados por cada carga. A esto en física se le llama una distribución de carga. Para nosotros será interesante el campo generado entre dos superficies planas paralelas cargadas con la misma cantidad de carga Q, una positiva y otra negativa (placas planoparalelas). Esta situación es parecida a la que sucede en una **membrana biológica** y nos servirá como modelo para estudiar las propiedades eléctricas de las membranas.

[6] La forma concreta depende de sus propiedades eléctricas

Empecemos por el campo creado por un plano infinito (bueno, muy grande en comparación con la distancia a la que miramos el campo) cargado positivamente con una carga total Q, con la carga repartida uniformemente. Si el plano es grande, por simetría podemos ver que el campo tiene que ser perpendicular al plano. Esto se ve claramente en la figura 4.12, pues el punto P donde calculamos el campo siempre va a tener cargas a un lado y a otro que crean campos cuyas componentes paralelas al plano son iguales y de sentido contrario. Se compensan por tanto y solo quedan componentes perpendiculares al plano. Un cálculo detallado[7] muestra que si miramos en puntos no muy lejanos del plano y lejos a su vez de los bordes, el campo es independiente de la distancia al plano y vale en módulo:

$$|\vec{E}_{1\text{plano}}| = \frac{Q}{2A\epsilon_0} \tag{4.23}$$

El campo apunta en un eje perpendicular al plano, hacia afuera para un plano con carga + y hacia el plano si la carga es -, como en las figuras 4.13 y 4.14. Donde

- Q es el valor de la carga total del plano (como número positivo siempre)
- A es el área
- ϵ_0 permitividad del vacío

El campo dentro de una membrana biológica se parece al campo entre dos placas planoparalelas

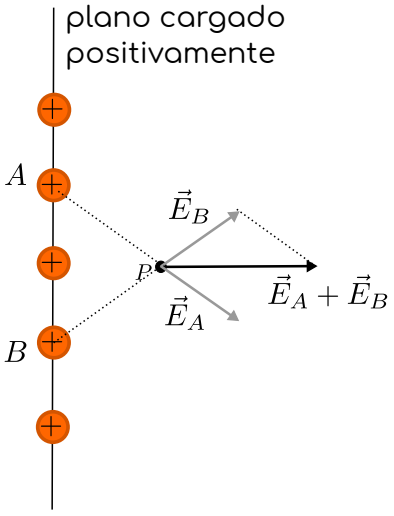


Figura 4.12: Vista transversal de un plano uniformemente cargado. El campo en un punto P es perpendicular al plano. Las cargas situadas en A y en B, a la misma distancia de P y con valor igual, generan campos cuyas componentes paralelas al plano se compensan exactamente.

[7] Que se escapa del objeto de este curso

A veces se expresa en función de la densidad superficial de carga $\sigma = \frac{Q}{A}$:

$$|\vec{E}_{1\text{plano}}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{4.24}$$

Con esto podemos calcular fácilmente el campo entre dos planos cargados con cargas opuestas $+Q$ y $-Q$. Teniendo en cuenta que el campo será superposición (suma vectorial) del campo creado por el plano positivo y el negativo, y teniendo en cuenta que el campo creado por el positivo apunta hacia afuera del plano, pero el negativo crea campo que apunta hacia el plano negativo. Entonces, en el espacio entre los dos planos, los dos campos apuntan en el mismo sentido (desde el positivo hacia el negativo) y el valor total es la suma (ver figura 4.15)

$$|\vec{E}_{2\text{planos}}| = \frac{Q}{2A\epsilon_0} + \frac{Q}{2A\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \text{ (región interior a los planos)} \tag{4.25}$$

En la región externa a los dos planos, el campo creado por el plano positivo y el del negativo apuntan en sentidos opuestos y se anula (figura 4.15):

$$|\vec{E}_{2\text{planos}}| = \frac{Q}{2A\epsilon_0} - \frac{Q}{2A\epsilon_0} = 0 \text{ (región externa a los planos)} \tag{4.26}$$

Resumiendo, el campo en la región entre dos planos cargados con la misma carga pero de signos opuestos es uniforme (igual en todo punto en módulo, dirección y sentido), perpendicular a los planos y apuntando desde el positivo al negativo. Fuera de las placas se anula. Se muestra en la figura 4.16.

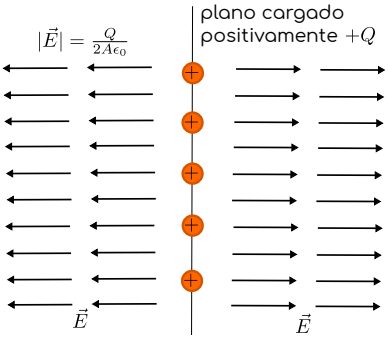


Figura 4.13: Campo eléctrico creado por una placa cargada positivamente con carga $+Q$. Es perpendicular al plano, apunta hacia afuera.

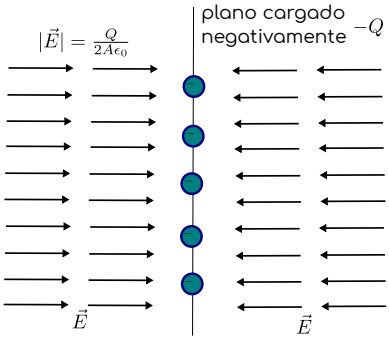


Figura 4.14: Campo eléctrico creado por una placa cargada negativamente con carga $-Q$. Es perpendicular al plano, apunta hacia el plano.

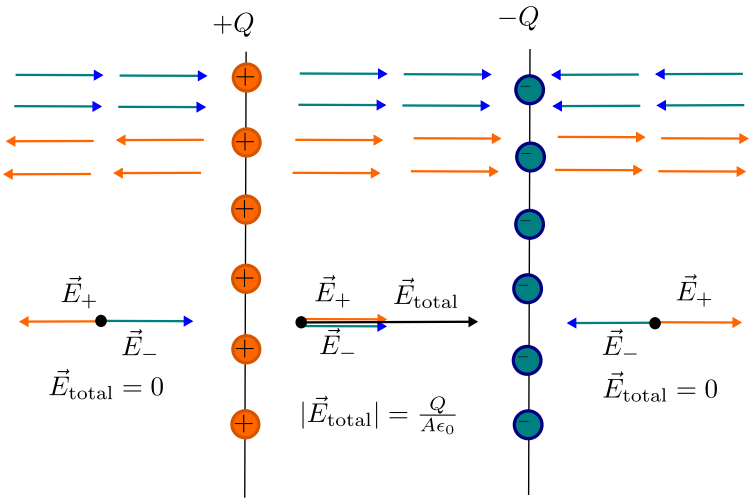


Figura 4.15: **Arriba:** El campo entre 2 planos cargados con $+Q$ y $-Q$ apunta en el mismo sentido en la región entre los planos y en sentidos contrarios en el exterior de las placas. **Abajo:** Suma vectorial de los campos generados por cada plano.

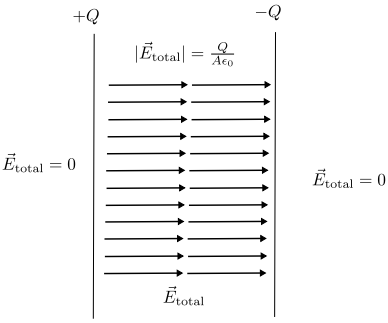


Figura 4.16: El campo entre 2 placas paralelas es uniforme en el interior y nulo en el exterior.

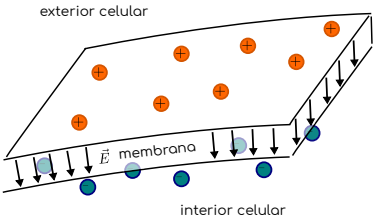
El campo eléctrico en la membrana plasmática

Las membranas de la mayoría de las células vivas, debido a las diferentes permeabilidades de los iones, acaban con algo de carga positiva en su superficie exterior y algo de carga negativa en la interior, en reposo[8]. Aunque la membrana no es plana, su superficie es grande (hasta miles de micras cuadradas) mientras que el espesor es relativamente pequeño (unos pocos nanometros) de modo que en una pequeña porción, la curvatura no será grande. Para estudiar el flujo de iones, podemos pensar en la membrana como si fuera un par de planos paralelos cargados, con un campo eléctrico uniforme en el interior de la membrana.

Por otro lado, el espacio en la membrana no es vacío, por lo que para el módulo del campo eléctrico dentro de la membrana tenemos que sustituir la permitividad del vacío ϵ_0 por la permitividad de la membrana ϵ:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{A\epsilon} \tag{4.27}$$

donde cabe recordar $\epsilon = K\epsilon_0$ con K constante dieléctrica. La constante dieléctrica de la membrana celular está en el rango de 3 o 5 aunque otros autores dan valores superiores[9,10].



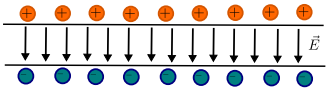


Figura 4.17: **Arriba:** La membrana celular adquiere cierta carga en su superficie exterior e interior, por redistribución de iones disueltos. La conservación de la carga implica que la carga positiva de una cara se compensa con la negativa de la otra. **Abajo:** Modelo de membrana como dos placas plano paralelas.

[8] A veces la polaridad se invierte, como veremos en la transmisión del impulso nervioso

Ejemplo 4.5.1 **Densidad superficial de carga de la membrana**

Estime la densidad superficial de carga de una membrana biológica sabiendo que el valor de la constante dieléctrica es 6 y el campo eléctrico $1 \times 10^7\,\mathrm{N/C}$. **Datos:** Permitividad del vacío $\epsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\mathrm{N \cdot C^2/m^2}$

SOLUCIÓN

Directamente de (4.27) escribimos

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \epsilon E = K\epsilon_0 E = 6(8{,}9 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N \cdot m^2)})(1 \times 10^7\,\mathrm{N/C}) = 5{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{C/m^2} \tag{4.5.1.1}$$

Lineas de campo

Para representar el campo creado por cargas o distribuciones de carga podemos pintar el valor del vector en determinados puntos. No obstante, esto puede llegar a ser confuso si tratamos de representar el campo en puntos cercanos. Otra manera de representar el campo es mediante las *líneas de campo*. Las líneas de campo son líneas en las que el campo es tangente en cada punto (indicando por tanto la dirección). El sentido se indica con una flecha. Finalmente, si representamos las líneas equiespaciadas en ángulo, el campo resulta ser más intenso donde las líneas están más juntas, por lo que también indican indirectamente el módulo. En la figura 4.18 se representan

[9] D.C. Giancoli. *Física: Principios con aplicaciones*. Prentice Hall Hispanoamérica, México, 1997

[10] J. C. Weaver and K. H. Schoenbach. Biodielectrics. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 10(5):715–716, October 2003. Conference Name: IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation

las líneas de campo para las cargas y distribuciones que hemos visto hasta ahora.

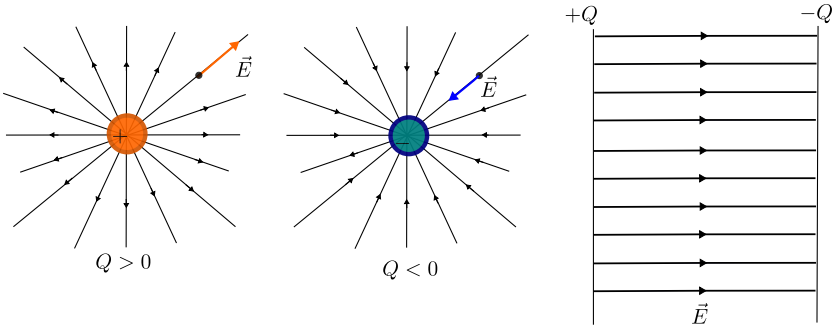


Figura 4.18: **Izquierda:** Líneas de campo de una carga positiva. **Centro:** Líneas de campo de una carga negativa. **Derecha:** Líneas de campo entre placas cargadas. Los vectores dibujados en un punto muestran que el vector campo es tangente a la línea de campo. Las líneas de campo "nacen" en las cargas positivas y "mueren" en las cargas negativas.

Campo eléctrico y conductores en equilibrio

En los buenos conductores como los metales, los electrones tienen mucha libertad para moverse. Por tanto, las cargas eléctricas en un conductor tienden a separase lo más posible, acumulándose en la superficie. Por otro lado, se alcanza el equilibrio rápidamente y las cargas se colocan de forma que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie. De no ser así, si hubiera componente de $\vec{E}$ tangencial a la superficie, aparecería una fuerza tangencial, como las cargas se pueden mover fácilmente, se moverían, lo cual contradice que hayamos llegado al equilibrio. La única posibilidad de equilibrio es que el campo sea perpendicular a la superficie.

El caso anterior de dos placas planas paralelas de metal es un buen ejemplo de esto (figura 4.18). El campo es perpendicular a las placas. En una esfera metálica cargada, la carga se acumula en la superficie y es radial, similar al campo de una carga puntual (figura 4.19).

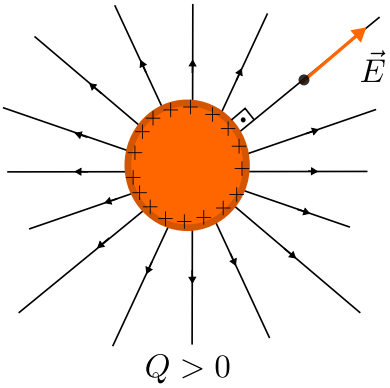


Figura 4.19: Campo eléctrico alrededor de una esfera conductora cargada. En un conductor en equilibrio, la carga se acumula en la superficie y el campo $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie. En la figura se representa el corte de la esfera con el plano del papel o de la pantalla.

4.6 *Potencial eléctrico*

Energía potencial eléctrica

Al igual que con la fuerza gravitatoria, hay una energía potencial asociada a la fuerza eléctrica. Pensemos por ejemplo en un electrón (carga $-e$) que depositamos en reposo en una zona donde hay un campo eléctrico, en el punto B de la figura 4.20 por ejemplo. El electrón sentirá una fuerza $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ y (si no hay otra fuerza actuando) una aceleración (de módulo) $a = F_e/m_e = e/m_e|\vec{E}|$. Al cabo de un tiempo habrá acelerado hasta una cierta velocidad v y tendrá una energía cinética asociada $\frac{1}{2}m_e v^2$. ¿De dónde viene esa energía?

De energía potencial que tenía acumulada por estar en un campo eléctrico.

Podemos verlo de otro modo. Para llevar el electrón por ejemplo desde el punto A al punto B hay que luchar contra una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ y desplazarlo una cierta distancia, por lo que realizamos un trabajo W. Ese W queda acumulado como (cambio) de energía potencial eléctrica.

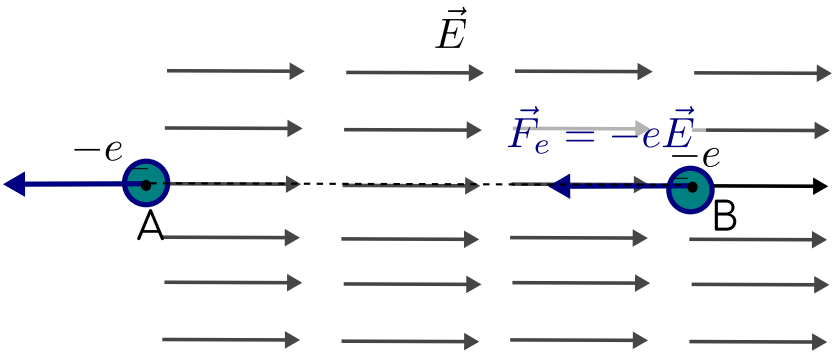


Figura 4.20: Fuerza eléctrica sobre un electrón en un campo eléctrico. Si solo actúa esa fuerza, un electrón dejado en reposo en el punto B acelerará hacia la izquierda (en dirección de la fuerza) y al cabo de un tiempo adquiere cierta velocidad.

Definiremos la energía potencial eléctrica en base a esto. El cambio de energía potencial eléctrica de una carga q entre dos puntos A (inicial) y B (final) será:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB}^{Fe} \tag{4.28}$$

donde W_{ab}^{Fe} es el trabajo que realiza la fuerza eléctrica sobre la carga q al pasar de A a B. Recordando la relación entre trabajo de una fuerza y su contraria, también se puede definir como

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = W_{AB}^{yo} \tag{4.29}$$

donde W_{ab}^{yo} es el trabajo de la fuerza "que hago yo" en contra de la fuerza eléctrica para llevar la carga q desde A hasta B, y que queda acumulado como energía potencial[11].

El trabajo podría ser en general una integral complicada. Aquí veremos unos casos simples. Lo importante es que la fuerza eléctrica es conservativa y ese trabajo no depende del camino exacto de A a B, solo de la posición inicial y final. Al igual que sucedía con la gravedad, de modo que la energía potencial eléctrica tiene sentido y además da lugar de nuevo a la conservación de la energía.

[11] Esto es exactamente igual que con la energía potencial gravitatoria, comparar con la expresión (1.39)

Conservación de la energía

Al igual que pasaba con la gravedad, si no hay fuerzas de rozamiento, solo fuerzas eléctricas tenemos que

$$W_{ab}^{F_e} = \Delta E_c \tag{4.30}$$

donde $W_{ab}^{F_e}$ es el trabajo neto de las fuerzas eléctricas. El trabajo neto de las fuerzas aplicadas es la variación de energía cinética (igual que vimos en (1.45)). Utilizando (4.28) tenemos

$$W_{ab}^{F_e} = -\Delta E_p = \Delta E_c \Rightarrow \Delta E_p + \Delta E_c = 0 \tag{4.31}$$

es decir, tomando la energía mecánica como $E_c + E_p$ tenemos de nuevo la conservación de la energía mecánica, simplemente ha cambiado el tipo de energía potencial.

Potencial eléctrico

Para evitar calcular trabajos para cargas positivas y negativas, es útil utilizar el potencial eléctrico V. La relación es la siguiente, una variación de potencial V entre dos puntos A y B es

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{-W_{AB}^{F_e}}{q} \tag{4.32}$$

donde ΔE_p es la variación de energía potencial de la carga q entre el punto A y el B. O bien, una carga q en un punto donde hay un potencial V tiene una energía potencial $E_p = qV$ y

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = q\Delta V = q(V_B - V_A) \tag{4.33}$$

Las unidades del potencial son por tanto

$$[V] = \frac{[E]}{[Q]} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1\,\text{V} \tag{4.34}$$

que recibe el nombre de "voltio" en honor a Volta[12]. Con esto, podemos calcular diferencias de potencial para diversas configuraciones de campo eléctrico. Vamos a ver 2, potencial creado por cargas puntuales y potencial en las placas plano paralelas. Este último es aplicable al potencial de membrana de las células, como veremos.

[12] De aquí deriva también voltaje, aunque lo correcto es hablar de diferencia de potencial

Ejemplo 4.6.1 **Conservación de la energía**

Un protón parte de un punto A en reposo y llega a un punto B con una cierta velocidad final v_f. Entre el punto A y B hay una diferencia de potencial eléctrico $V_B - V_A = -10\,\text{V}$. ¿Cuánto vale la velocidad final?

Datos: Carga del protón: $q = +e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, masa de un protón: $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg

SOLUCIÓN

Utilizando la relación entre energía potencial eléctrica y potencial eléctrico calculamos la diferencia de energía potencial entre ambos puntos (final menos inicial):

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A) = (1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(-10\,\mathrm{V}) = -1{,}6 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} \tag{4.6.1.1}$$

El protón pierde energía potencial, que transforma en energía cinética:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow Ec_f - Ec_i = -\Delta E_p \Rightarrow E_{cf} = -\Delta E_p \Rightarrow \frac{1}{2} m_p v_f^2 = -\Delta E_p \tag{4.6.1.2}$$

donde se ha tenido en cuenta que $E_{ci} = 0$. Despejando

$$v_f = \sqrt{\frac{-2\Delta E_p}{m_p}} = \sqrt{\frac{2(1{,}6 \times 10^{-18}\,\mathrm{J})}{1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} \simeq 4{,}4 \times 10^4\,\mathrm{m/s} \tag{4.6.1.3}$$

Nótese que al ser la diferencia de energía potencial negativa, con el signo negativo queda un número positivo y el resultado tiene sentido. Así, las cargas positivas caen espontáneamente hacia abajo en el potencial (en B hay un potencial 10 V menos que en A, por ejemplo en A 24 V y en B 14 V). Las cargas negativas por el contrario, suben espontáneamente por el potencial. Para comprobarlo, podemos repetir el ejercicio suponiendo ahora un electrón que parte del punto B en reposo y llega a A, con la misma diferencia de potencial $V_B - V_A = -10\,\mathrm{V}$. OJO, el punto final es A ahora y el inicial B y la carga de un electrón es $q = -e$

$$\Delta E_p = q(V_A - V_B) = -e(10\,\mathrm{V}) = -1{,}6 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} \tag{4.6.1.4}$$

al igual que antes y la velocidad sale diferente por la diferente masa del electrón ($m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg) pero se puede calcular

$$v_f = \sqrt{\frac{-2\Delta E_p}{m_e}} \simeq 1{,}9 \times 10^6\,\mathrm{m/s} \tag{4.6.1.5}$$

Las cargas negativas tienden a subir en el potencial, las positivas tienden a bajar. Esto es consistente con el hecho de que situadas en el mismo campo eléctrico la fuerza que sienten unas y otras tienen sentidos contrarios. Por último, decimos que tienden a bajar en el potencial, por ejemplo, igual que una piedra tiende a caer en el campo gravitatorio, aunque por supuesto puede subir si le damos velocidad inicial hacia arriba. Igual una carga positiva podría subir en un potencial si la lanzamos con velocidad suficiente.

Potencial eléctrico creado por cargas puntuales

Ahora que sabemos que el potencial eléctrico es algo parecido a la energía y por tanto resulta útil, veamos cómo calcular el potencial creado por diferentes cargas. Vamos a ver 2 casos, las cargas puntuales y las placas paralelas cargadas (o membrana celular).

Para calcular el potencial creado por una carga positiva Q en un punto alejado de ella una distancia r tenemos que acudir a la definición:

$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}^{F_e}}{q} \tag{4.35}$$

esto es, tenemos que calcular el trabajo de la fuerza eléctrica $F_e = qE$ sobre una carga q cuando pasa de un punto A a otro B en el campo eléctrico E. Recordando el campo E creado por una carga a una distancia r de la carga Q:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \tag{4.36}$$

que apunta radialmente. Como depende del cuadrado de la distancia y por tanto la fuerza sobre la carga q, $F_e = qE = \frac{kQq}{r^2}$ depende de la posición, y el trabajo hay que calcularlo con una integral (la integral de $1/r^2$, que es, $-1/r$). Pongamos que movemos la carga q desde un punto a distancia r_A de Q a una distancia r_B de Q en línea recta de forma radial, como en la figura 4.21. Hacerlo así, nos permite tomar el ángulo entre fuerza y desplazamiento como o y $\cos\theta = 1$. Como la fuerza eléctrica es conservativa, el trabajo no depende del camino exacto, solo de posición final e inicial. La diferencia de potencial es entonces

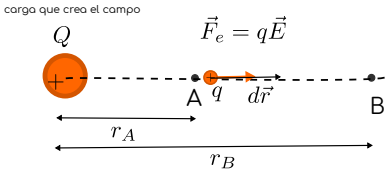


Figura 4.21: La diferencia de potencial $V_B - V_A$ es el trabajo de la fuerza eléctrica desde el punto A al punto B. Como se ve en la figura, si calculamos el trabajo en la línea recta radial, el coseno del ángulo entre fuerza y desplazamiento es siempre 1.

$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}^{F_e}}{q} = \frac{-1}{q}\int_{r_A}^{r_B} F_e dr = -\int_{r_A}^{r_B} E dr = -kQ\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr \tag{4.37}$$

Haciendo la integral, que es como $\int 1/x^2 dx = -1/x$ tenemos

$$V_B - V_A = kQ\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \left(\frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A}\right) \tag{4.38}$$

De aquí, podemos tomar el potencial creado por una carga Q en un punto a una distancia r cualquiera como[13]

$$V = \frac{kQ}{r} \tag{4.39}$$

Esta fórmula vale igualmente para una carga negativa sin más que poner en Q el valor con su signo correcto.

[13] Esto equivale a tomar el valor $V = 0$ para el potencial a una distancia muy grande. Como con las energías, lo importante para la física es la diferencia de potencial y la física no cambia si cambiamos el 0 de lugar.

Potencial creado por varias cargas

La ventaja de trabajar con el potencial, sobre el campo, es que no es un vector, es simplemente un número (con su signo). Así, si en una región del espacio hay varias cargas, el potencial eléctrico en un punto se calcula como la suma de los potenciales creados en ese punto por todas las cargas[14]. Por ejemplo, si tenemos 2 cargas Q_1 y Q_2 y queremos un calcular el potencial total en un punto P como en la figura 4.22, a distancia r_1 de la carga 1 y a distancia r_2 de la carga 2, tenemos:

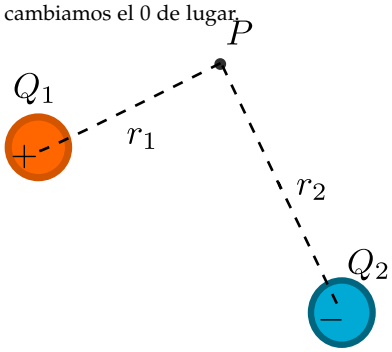


Figura 4.22: Dos cargas generan un potencial en un punto P del espacio.

[14] Al igual que en el campo, el potencial se extiende por todo el espacio, de modo que tenemos que especificar en qué punto calculamos el potencial

$$V_{\text{total}}(\text{en P}) = V_1 + V_2 = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} \tag{4.40}$$

y si tuviéramos más cargas creando potencial, pues se suman más términos. Aquí es fácil ver que las cargas negativas hacen disminuir (hacia $-\infty$) el potencial en un punto, mientras que las positivas lo aumentan (hacia $+\infty$).

Energía potencial de una configuración de cargas

Recordemos la relación entre el potencial V en un punto P del espacio y la energía que tiene una carga q si la situamos ahí que hemos visto en 4.33:

$$E_p = qV(\text{en P}) \tag{4.41}$$

Ese potencial V en el punto donde está q lo puede haber creado una carga, dos, tres o las que queramos, es igual.

Ahora, supongamos que el potencial V en ese punto lo ha creado una sola carga puntual Q, la energía que tiene q será

$$E_p = qV(\text{creado por Q en P}) = kq\frac{Q}{r} \tag{4.42}$$

donde r es la distancia entre las cargas. Igual, podríamos pensar que q crea un potencial kq/r en el punto donde está Q y la energía de Q sería

$$E_p = QV(\text{creado por q en el punto donde está Q}) = kQ\frac{q}{r} \tag{4.43}$$

y el resultado es exactamente el mismo. Esta energía potencial es en realidad la energía de interacción de la pareja.

Si en lugar de 2 cargas solo, tenemos un conjunto de más cargas Q_1,Q_2,Q_3, etcétera, la energía total de interacción eléctrica será la suma a todas las parejas posibles de términos kQ_1Q_2/r, contando cada pareja 1 sola vez

$$E_p = \sum_{\text{parejas}} k\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}} \tag{4.44}$$

con r_{ij} la distancia entre las cargas i y la j. Por ejemplo para tres cargas Q_1, Q_2, Q_3 como en la figura 4.23 será

$$E_p = k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right) \tag{4.45}$$

Este número puede ser lógicamente positivo o negativo, dependiendo de los valores de las cargas y las distancias.

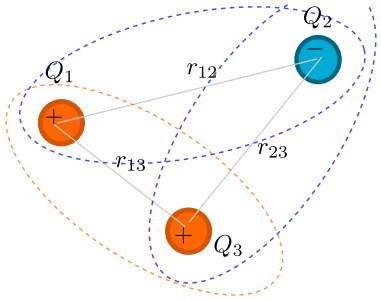


Figura 4.23: Para calcular la energía total, hay que sumar (con su signo) las contribuciones de cada pareja. Cada pareja contribuye una vez con un término del tipo kQQ'/r

El signo de la energía potencial

Para una configuración de cargas (dos o más), el signo de la energía potencial refleja si es una configuración ligada o no. Consideremos la configuración que sea como un estado final. Si consideramos

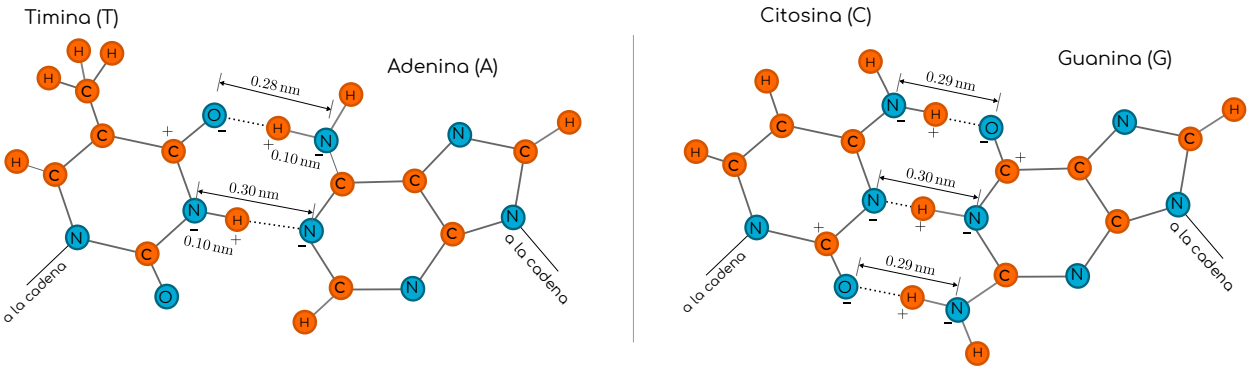
un estado inicial en el que las cargas están infinitamente separadas su energía inicial es $E_{pi} = 0$, entonces la energía de interacción

$$E_p = k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{23}} + \ldots\right) = E_{pf} - E_{pi} = W^{yo} \quad (4.46)$$

representa la diferencia de energía entre las dos situaciones, o lo que es lo mismo, el trabajo que nos cuesta crear dicha configuración de cargas trayéndolas desde el infinito en contra de las fuerzas eléctricas. Si la energía potencial final es positiva, nos ha costado trabajo y tenderán a separarse cuando las soltemos, igual que nos cuesta trabajo aumentar la energía potencial de una piedra aumentando su altura. Si la energía final es negativa (por ejemplo 2 cargas, una positiva y otra negativa) lo que nos cuesta trabajo es llevarlas de nuevo al infinito, esto es separarlas en contra de la fuerza eléctrica que tiende a juntarlas. Una energía potencial total negativa representa un estado ligado, al que hay que proporcionar energía para romperlo, similar a la energía de un enlace químico. Con esta idea en mente, podemos calcular la energía de enlace de hidrógeno entre las bases nitrogenadas en el ADN, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6.2 **Energía de interacción A-T y G-C en el ADN**

Basándose en la figura, estimar la energía necesaria para separar la adenina de la timina, suponiendo que la distancia entre átomos dentro de cada base es 0,10 nm. Las cargas de los átomos son $8{,}0 \times 10^{-20}$ C para el oxígeno y $3{,}0 \times 10^{-20}$ C para el nitrógeno y el hidrógeno. Repetir el cálculo para el par guanina-citosina.

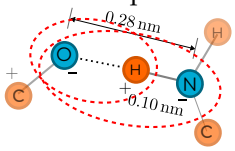


SOLUCIÓN

Adenina-Timina

Para separar la Adenina de la Timina hay que vencer las fuerzas netas que se establecen entre los átomos de la Adenina y los de la Timina, debido a las cargas eléctricas, y realizar un trabajo. Como hemos

visto en teoría, el trabajo coincide con la variación de energía potencial entre dos estados: el final, totalmente separadas A y T, y el estado inicial reflejado en la figura. Como en el estado final, los átomos dentro de cada base mantienen sus posiciones, la energía de interacción entre átomos dentro de la misma molécula no contribuye a la energía de enlace A-T. Tenemos por tanto que calcular la energía potencial asociada a la situación de la figura, considerando parejas de átomos en bases diferentes y utilizando la expresión (4.45). Utilicemos la expresión con los átomos $O\cdots H-N$ en el primer enlace de hidrógeno, la fila de arriba



$$E_{pOHN} = k\left(\frac{Q_O Q_H}{r_{OH}} + \frac{Q_O Q_N}{r_{ON}}\right) \tag{4.6.2.1}$$

donde según la figura las distancias son $r_{ON} = 28\,\text{nm}$ y $r_{OH} = (0{,}28 - 0{,}10)\text{nm} = 0{,}18\,\text{nm}$ Sustituyendo los valores de las cargas

$$E_{pOHN} = (9\times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left[\frac{(-8\times 10^{-20}\,\text{C})(3\times 10^{-20}\,\text{C})}{(0{,}18\times 10^{-9}\,\text{m})} + \frac{(-8\times 10^{-20}\,\text{C})(-3\times 10^{-20}\,\text{C})}{(0{,}28\times 10^{-9}\,\text{m})}\right] = \tag{4.6.2.2}$$
$$= -4{,}3\times 10^{-20}\,\text{J}$$

El primer término es negativo como corresponde a una atracción que tiende a ligar, mientras que la interacción O-N contribuye con un término positivo en la energía. Para la segunda fila, $N-H\cdots N$, tenemos de forma similar

$$E_{pNHN} = k\left(\frac{Q_N Q_H}{r_{NH}} + \frac{Q_N Q_N}{r_{NN}}\right) \tag{4.6.2.3}$$

con $r_{NH} = (0{,}30 - 0{,}10)\text{nm} = 0{,}20\,\text{nm}$ y $r_{NN} = 0{,}30\,\text{nm}$. Para hacer un cálculo correcto, tendríamos que considerar otras interacciones "en diagonal" como por ejemplo entre el H de la Adenina en la primera fila y el N de la Timina en la segunda. Sin embargo, no tenemos información sobre esas distancias, por lo que no lo podemos calcular. Por otro lado, como la energía decrece con la distancia, y las distancias en diagonal son mayores, podemos suponer que van a contribuir poco al resultado final.

Recolectando los 4 términos que tenemos, la energía de enlace de A-T es

$$E_{pAT} = E_{pNHN} + E_{pOHN} \simeq -5{,}6\times 10^{-20}\,\text{J} \tag{4.6.2.4}$$

El resultado es negativo. Corresponde a un estado ligado y habría que hacer un trabajo o proporcionar una energía de $5{,}6\times 10^{-20}\,\text{J}$ para separar la Adenina y la Timina totalmente.

Guanina-Citosina

Procedemos de igual forma, calculando la energía de interacción entre los átomos en las tres filas en las que se forma enlace de hidrógeno

$$E_{pGC} = k\left(2\frac{Q_O Q_H}{r_{OH}} + 2\frac{Q_O Q_N}{r_{ON}} + \frac{Q_N Q_N}{r_{NN}} + \frac{Q_N Q_H}{r_{NH}}\right) \tag{4.6.2.5}$$

donde las distancias son un poco diferentes ahora $r_{OH} = 0{,}19\,\text{nm}$, $r_{NN} = 0{,}29\,\text{nm}$, $r_{NN} = 0{,}30\,\text{nm}$ y $r_N H = 0{,}20\,\text{nm}$. Los dos primeros sumandos están multiplicados por 2 porque corresponden a la fila de arriba y a la inferior, que son iguales. El resultado final es

$$E_{pGC} = -9{,}2\times 10^{-20}\,\text{J} \tag{4.6.2.6}$$

La energía de enlace es mayor en G-C (hay que proporcionar mayor energía para separarlas) como corresponde al hecho de que tiene 3 enlaces de hidrógeno en lugar de 2. De hecho, la relación de energías es

$$\frac{E_{pGC}}{E_{pAT}} = \frac{9{,}2}{5{,}6} \simeq 1{,}6 \approx \frac{3}{2} \tag{4.6.2.7}$$

Medidas experimentales[15] dan para las energías de enlaces (en fase gas) valores algo superiores de $8{,}4 \times 10^{-20}$ J para A-T y de $14{,}6 \times 10^{-20}$ J para el par G-C, de modo que nuestra cuenta simple es bastante aproximada.

[15] Celia F. Guerra, F. Matthias Bickelhaupt, J. G. Snijders, and E. Jan Baerends. Hydrogen bonding in DNA base pairs: Reconciliation of theory and experiment. *Journal of the American Chemical Society*, 122(17):4117–4128, 2000

Diferencia de potencial entre dos placas paralelas cargadas

Volvamos a las 2 placas paralelas cargadas, modelo para la membrana celular. Recordemos que el campo eléctrico entre las placas es uniforme, apunta de la placa positiva a la negativa y vale en módulo $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon}$ (ver ecuación (4.27)) con $\sigma = \frac{Q}{A}$ la densidad superficial de carga de la placa positiva. Calculemos la diferencia de potencial entre las 2 placas. De la definición:

$$\Delta V = V_+ - V_- = V_b - V_a = \frac{-W_{ab}^{F_e}}{q} \tag{4.47}$$

tomando un punto b en la placa positiva y un punto a en la placa negativa como en la figura 4.24. Tenemos que calcular el trabajo $W_{ab}^{F_e}$ de la fuerza eléctrica para llevar una carga q desde a hasta b. La fuerza eléctrica sobre una carga q es

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \tag{4.48}$$

y apunta en la dirección del campo si tomamos una carga q positiva. El campo va de la placa $+$ a la $-$ y es constante. Según la figura el ángulo entre fuerza y desplazamiento es 180° y el trabajo

$$W_{ab}^{F_e} = q|\vec{E}|d\cos(\pi) = -q|\vec{E}|d \tag{4.49}$$

con d la separación entre las placas. La diferencia de potencial queda

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{-W_{ab}^{F_e}}{q} = \frac{q|\vec{E}|d}{q} = |\vec{E}|d \tag{4.50}$$

Nótese que es una cantidad positiva, el potencial de la placa positiva es una cantidad $|\vec{E}|d$ más alto que el potencial de la placa negativa. Lo importante es la diferencia de potencial, podemos poner el cero de potencial en cualquiera de las placas[16]. Por ejemplo, si tomamos el cero de potenciales en la placa negativa $V_- = 0$ entonces

$$V_+ = V_+ - V_- = \Delta V = |\vec{E}|d \tag{4.51}$$

Si por el contrario, ponemos el cero de potencial en la positiva $V_+ = 0$, entonces V_- queda

$$V_- = V_- - V_+ = -(V_+ - V_-) = -|\vec{E}|d \tag{4.52}$$

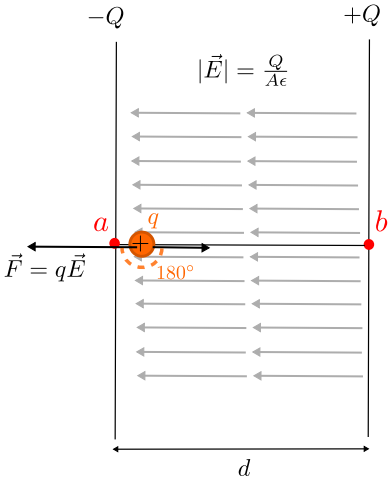


Figura 4.24: El campo entre dos placas cargadas apunta de la placa con carga positiva hacia la placa negativa. La fuerza eléctrica sobre una carga q es qE en el mismo sentido. Si movemos la carga q desde la placa negativa a la positiva el ángulo entre fuerza y desplazamiento es 180°.

[16] Igual que podemos poner el 0 de alturas en cualquier punto para calcular ΔE_p gravitatoria

y en cualquier caso la diferencia $V_+ - V_-$ es la misma. Esto es interesante porque el potencial de membrana se define como $V_{int} - V_{ext}$ y normalmente se toma $V_{ext} = 0$. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 4.6.3 Diferencia de potencial de membrana

En unas determinadas condiciones, el campo de la membrana celular vale $0{,}75 \times 10^7\,\mathrm{N/C}$ y apunta desde la superficie exterior a la interior. El espesor de la membrana es de 8 nm. ¿Cuánto vale el potencial de membrana? Si tomamos el potencial en la superficie exterior como 0 V, ¿cuánto vale el potencial en el interior?

SOLUCIÓN

Si el campo apunta del exterior al interior, el exterior de la membrana está cargado positivamente y el interior negativamente (el campo va de cargas + a -). El potencial del exterior (placa positiva) es superior al del interior (placa negativa). Según hemos visto entonces:

$$V_{ext} - V_{int} = V_+ - V_- = |\vec{E}|d = (0{,}75 \times 10^7\,\mathrm{N/C})(0{,}8\,\mathrm{nm}) = 0{,}060\,\mathrm{V} = 60\,\mathrm{mV} \tag{4.6.3.1}$$

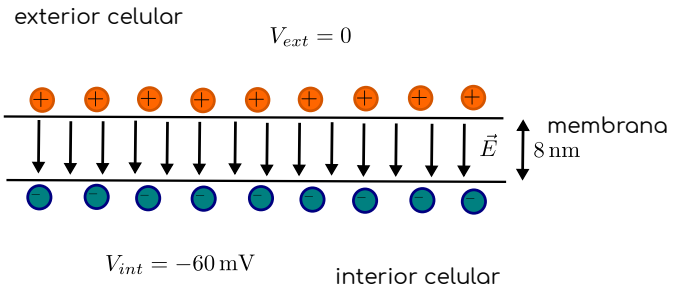
Por tanto, el potencial de membrana, definido como $V_{int} - V_{ext}$ vale

$$V_{int} - V_{ext} = -|\vec{E}|d = -60\,\mathrm{mV} \tag{4.6.3.2}$$

Si tomamos $V_{ext} = 0$ entonces

$$V_{int} = -60\,\mathrm{mV} \tag{4.6.3.3}$$

Resumiendo



Membrana en polaridad normal. Potencial de reposo.

Ejemplo 4.6.4 Diferencia de potencial de membrana en polaridad inversa

Durante el potencial de acción, la polaridad de la membrana puede invertirse. Supongamos que el campo de la membrana celular vale $0{,}4 \times 10^7\,\mathrm{N/C}$ y apunta desde la superficie interior a la exterior, al contrario de la situación de reposo. El espesor de la membrana es de 8 nm. ¿Cuánto vale el potencial de membrana? Si tomamos el potencial en la superficie exterior como 0 V, ¿cuánto vale el potencial en el interior?

SOLUCIÓN

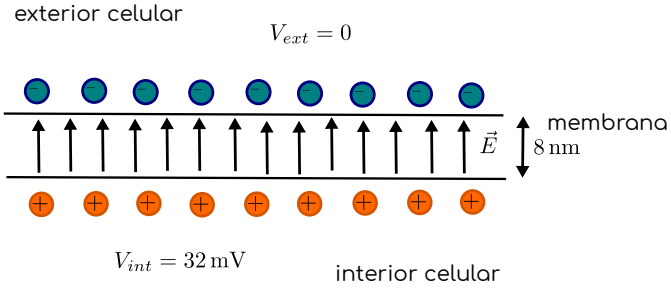
Si el campo apunta del interior al exterior, el interior de la membrana está ahora cargado positivamente y el exterior negativamente (el campo va de cargas + a -). El potencial del interior (placa positiva) es superior al del exterior (placa negativa). Según hemos visto entonces:

$$V_{int} - V_{ext} = V_+ - V_- = |\vec{E}|d = (0{,}4 \times 10^7\,\mathrm{N/C})(0{,}8\,\mathrm{nm}) = 0{,}032\,\mathrm{V} = 32\,\mathrm{mV} \qquad (4.6.4.1)$$

y ese es por tanto el potencial de membrana (siempre se define interior menos exterior). Si tomamos el exterior cero $V_{ext} = 0$ entonces

$$V_{int} = 32\,\mathrm{mV} \qquad (4.6.4.2)$$

Graficamente:



Membrana en polaridad invertida

Relación campo eléctrico y potencial

Las placas paralelas nos permite establecer otra relación entre campo y potencial eléctrico. Según hemos visto $\Delta V = V_+ - V_- = |\vec{E}|d$, de modo que

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V}{d} \qquad (4.53)$$

Si pensamos en una distancia pequeña entre dos puntos, el módulo campo coincide con la variación del potencial por unidad de longitud, esto es, el gradiente del potencial. Además sabemos que el campo apunta de donde hay mayor potencial a donde hay menor potencial ya que va de cargas positivas a negativas y el potencial cerca de cargas positivas es mayor que cerca de cargas negativas (ver ejemplos anteriores). De hecho, rigurosamente si sabemos el potencial en el espacio, el campo es el menos gradiente del potencial:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(V), \text{ o bien } \vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad (4.54)$$

según las diferentes notaciones.

Sin entrar en detalles matemáticos, el campo apunta en la dirección de mayor decrecimiento del potencial y es más intenso cuanto más rápido varíe el potencial por unidad de longitud. Por ejemplo, en zonas en las que el potencial es constante en el espacio, el campo es nulo y viceversa. En la membrana celular, el campo está confinado

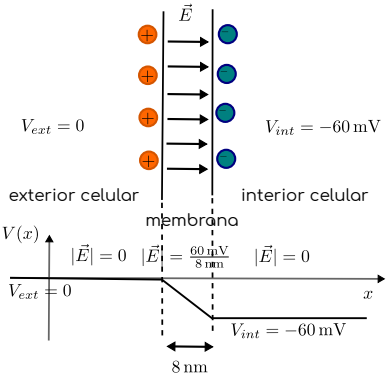


Figura 4.25: Potencial eléctrico a través de la membrana celular. El salto de potencial y el campo se restringen a la zona interior a la membrana. Fuera el potencial es constante y el campo nulo.

a la región interna de la membrana, donde es uniforme y el potencial pasa linealmente de 0 V a V_{int} mientras que en el exterior el potencial es constante (y el campo nulo), como en la figura 4.25.

Superficies equipotenciales

Una superficie equipotencial es el lugar geométrico de los puntos de igual potencial eléctrico o potencial constante. El campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales: si nos desplazamos cualquier distancia por una superficie equipotencial, por definición de diferencia de potencial, el trabajo es nulo, y por tanto la fuerza eléctrica tiene que ser perpendicular a la superficie equipotencial.

En torno a una carga puntual, las superficies equipotenciales son esferas (el potencial solo depende de la distancia a la carga, puntos a igual distancia tienen igual potencial). En el interior de dos placas plano paralelas cargadas con $+Q$ y $-Q$ son planos paralelos a las placas (perpendiculares al campo).

Si dos superficies equipotenciales de potencial V_1 y V_2 están separadas una distancia d, el módulo del campo es aproximadamente $E = |V_1 - V_2|/d$. Resumiendo, dadas unas superficies equipotenciales, el campo:

- es perpendicular a las superficies en todo punto
- entre 2 superficies cercanas, apunta de la superficie a potencial más alto hacia la superficie a potencial más bajo[17]
- es más intenso cuanto más juntas están las superficies

[17] El potencial es más alto cuanto más cerca de $+\infty$ y más bajo cuanto más cerca de $-\infty$. Por ejemplo, -6 es más alto que -10.

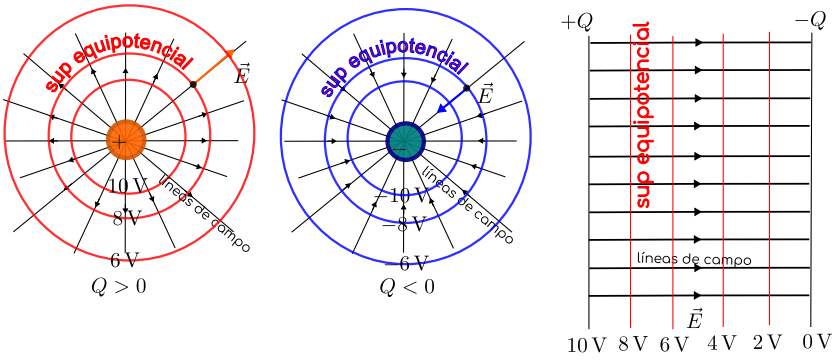


Figura 4.26: Superficies equipotenciales (en color) superpuestas a las líneas de campo (en negro). El campo es perpendicular a las superficies equipotenciales, va de potencial alto a más bajo, es más intenso cuánto más cerca estén las líneas.

Por último, vimos que en un buen conductor eléctrico el campo es perpendicular a la superficie, de donde se deduce que la superficie de un conductor es equipotencial, como por ejemplo las placas paralelas de la figura 4.26.

4.7 *Capacidad de la membrana biológica*

La combinación de dos planos paralelos cargados con carga Q y $-Q$ respectivamente es un elemento eléctrico que se conoce como *condensador* o capacitor. Es un arreglo capaz de almacenar carga separada una cierta distancia y por tanto acumula una cierta energía eléctrica[18]. La relación entre la carga almacenada y la diferencia de potencial entre las placas es una magnitud física llamada capacidad C

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{4.55}$$

y se mide en "faradios"

$$[C] = 1\,\mathrm{C/V} = 1\,\mathrm{F} \tag{4.56}$$

En el caso de las placas cargadas, la capacidad resulta no depender de la carga o el potencial impuesto, si no ser una constante:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon A}{d} \tag{4.57}$$

puesto que el campo entre dos placas es $E = \frac{Q}{A\epsilon}$, con A el área de las placas, y d la distancia entre las placas. Así, diferencia de potencial y carga son proporcionales en un condensador

$$Q = C\Delta V = \frac{\epsilon A}{d}\Delta V \tag{4.58}$$

y cuanta más carga se acumule mayor será la diferencia de potencial y viceversa. Esto vale igualmente para una membrana biológica cargada. La capacidad de la membrana biológica depende del área de la membrana obviamente (como en (4.57)), pero podemos dar un valor para la capacidad por unidad de área de la membrana C_m

$$C_m = \frac{C}{A} = \frac{\epsilon}{d} \tag{4.59}$$

Un valor típico de la capacidad por unidad de área de las membranas biológicas es

$$C_m = 1 \times 10^{-2}\,\mathrm{F/m^2} \tag{4.60}$$

para axones sin mielina, mientras que en axones con vaina de mielina es sensiblemente menor, aproximadamente

$$C_m = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{F/m^2} \tag{4.61}$$

lo que tiene implicaciones para la transmisión del impulso nervioso, como veremos más adelante.

[18] Los flashes de las cámaras se alimentan con un condensador normalmente porque es capaz de proporcionar energía a la bombilla muy rápidamente al descargarse

4.8 Corriente eléctrica

Pasamos a estudiar cargas en movimiento a través de un medio material (un cable, una disolución, el axón) lo que se conoce como corriente eléctrica. Para mantener una corriente eléctrica durante un cierto tiempo se necesita proporcionar energía de forma continua, por ejemplo mediante una batería o un generador. Los primeros experimentos de corriente que dieron lugar a la invención de la batería o pila por A. Volta estaban relacionados precisamente con la "electricidad animal", por parte de Galvani.

La batería

Las baterías no generan la carga eléctrica, si no que la ponen en movimiento. Más específicamente las baterías proporcionan una diferencia de potencial entre sus dos polos (uno positivo y otro negativo) que mantiene la corriente. Por motivos históricos, esta diferencia de potencial se conoce también como "fuerza electromotriz" pero no es una fuerza. Las cargas eléctricas (los electrones en los cables metálicos normalmente) llegan a la batería por un polo. Esta les proporciona una cierta cantidad de energía $q\Delta V$ y vuelven al circuito por el otro polo donde esa energía se utiliza en los elementos eléctricos, por ejemplo en una bombilla, para generar la luz y el calor.

Intensidad de corriente

La intensidad de corriente I es la cantidad de carga que atraviesa una determinada sección de un circuito o un elemento eléctrico (una bombilla, una resistencia, un ventilador...) por unidad de tiempo:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{4.62}$$

Sus unidades son

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{1\,\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{A} \tag{4.63}$$

que recibe el nombre de "amperio". La intensidad de corriente se define de forma que una carga positiva circula desde el polo positivo de la batería al polo negativo, perdiendo energía potencial eléctrica. Dentro de la batería circula del polo negativo al positivo y gana energía potencial eléctrica[19].

Este es el signo convencional de la intensidad de corriente, aunque hoy sabemos que por ejemplo en los metales la conducción eléctrica se debe a electrones poco ligados que circulan del polo negativo al positivo de la batería a través del circuito. A todos los efectos[20] una carga negativa circulando de "-" a "+" es como una positiva

[19] La pila transforma energía química en energía potencial eléctrica para hacer esto

[20] Bueno, no todos, el efecto Hall permite distinguir si los portadores son positivos o negativos. Pero no entraremos en eso en este libro.

circulando de "+" a "-" por lo que tomaremos el sentido habitual de la corriente.

Resistencia eléctrica. Ley de Ohm

En muchos casos la intensidad de corriente en un elemento eléctrico es proporcional a la diferencia de potencial que se le aplica[21]. A esto se le conoce como ley de Ohm:

$$V = IR \tag{4.64}$$

[21] Es un poco como el flujo de agua en una tubería, que será mayor cuánto más alto esté el depósito desde el que fluye el agua.

donde V es la diferencia de potencial aplicada *al elemento eléctrico en cuestión*, I la intensidad que lo recorre, y R se conoce como resistencia eléctrica, ya que a mayor R menor I para el mismo V aplicado. Aunque es una diferencia de potencial aplicado y sería mejor escribir ΔV normalmente se acepta escribir V en la ley de Ohm.

Para muchos materiales, la R es aproximadamente constante y no depende de la intensidad que recorra el elemento, sobre todo para buenos conductores como los metales. La resistencia tiene unidades:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow [R] = 1\,\mathrm{V/A} = 1\,\Omega \tag{4.65}$$

que recibe el nombre de "ohmio". Veamos un ejemplo simple de la ley de Ohm.

Ejemplo 4.8.1 Una bombilla conectada a un pila

La bombilla de la figura tiene una resistencia eléctrica de $6\,\Omega$. La batería es de $12\,\mathrm{V}$. Calcular la intensidad de corriente que circula por la bombilla.

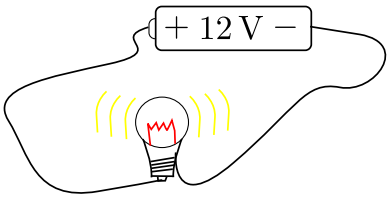


Figura 4.27: Circuito del ejemplo 4.8.1.

SOLUCIÓN

La batería proporciona una diferencia de potencial de $V = 12\,\mathrm{V}$. Por el momento pensemos que los cables no ofrecen resistencia y trasladan directamente el potencial de un otro extremo al otro del cable. La bombilla tiene aplicada una diferencia de potencial entonces de $V = 12\,\mathrm{V}$. Utilizando la ley de Ohm sobre la bombilla:

$$V = IR \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{6\,\Omega} = 2\,\mathrm{A} \tag{4.8.1.1}$$

Nótese que el hecho de circular una corriente por la bombilla (o por cualquier resistencia) hace que las cargas (de valor q) pierdan energía potencial eléctrica (qV) ya que antes de entrar en la bombilla las cargas estaban a un potencial $12\,\mathrm{V}$ y salen a $0\,\mathrm{V}$, por ejemplo, o cualquier otros dos números que den la misma diferencia de potencial. ¿Dónde se ha ido esa energía? Obviamente se transforma en luz y calor emitidos por la bombilla.

El origen microscópico de la resistencia de los materiales al paso de la corriente eléctrica es variado. En el caso de los metales, se debe

esencialmente a las colisiones de los electrones con los átomos de la red cristalina del metal que están en vibración. En el caso de una disolución, la electricidad se transmite si hay iones disueltos y la resistencia dependerá de la mayor o menor movilidad de los iones a través del fluido, de la cantidad o concentración de ellos, y de la carga que tengan.

Resistividad de un cable eléctrico y del axón

La resistencia de un segmento de material conductor (un cable por ejemplo) es proporcional a la longitud. A mayor longitud, mayor número de colisiones de los electrones. Es además inversamente proporcional al área de la sección transversal del conductor, pues se puede mover mayor cantidad de carga a través del cable para la misma diferencia de potencial:

$$R \propto \frac{L}{A} \tag{4.66}$$

Finalmente, la resistencia depende del material del que este hecho el cable. Esto se mide mediante una propiedad del material llamada "resistividad" (ρ), de modo que

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{4.67}$$

La resistividad es baja en los buenos conductores (metales) y alta para los aislantes eléctricos. Las unidades de la resistividad son

$$\rho = R\frac{A}{L} \Rightarrow [\rho] = \frac{1\,\Omega \mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = 1\,\Omega \cdot \mathrm{m} \tag{4.68}$$

material	$\rho(\Omega \cdot \mathrm{m})$
Plata	$15{,}9 \times 10^{-9}$
Cobre	$16{,}8 \times 10^{-9}$
Agua de mar	0,3
Agua pura	$2{,}5 \times 10^{5}$
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$

La resistividad del axón que transmite el impulso nervioso es, según el libro de Kane[22] de $\rho_a = 2\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Los valores en la literatura oscilan entre $0{,}3 - 0{,}7\,\Omega \cdot \mathrm{m}$ para los axones de calamar, y algo superior para vertebrados, en torno a $0{,}8 - 2\,\Omega \cdot \mathrm{m}$ siendo $1\,\Omega \cdot \mathrm{m}$ un valor comúnmente aceptado como valor representativo[23]. Es en general parecida al agua de mar, ya que es esencialmente agua con iones desde el punto de vista eléctrico. Este valor es intermedio entre aislantes y conductores, más bien aislante. Resulta quizás sorprendente que el medio empleado para la transmisión del impulso nervioso sea de un material que uno consideraría como un aislante de la electricidad. Esto indica probablemente que dicha transmisión es en realidad más complicada que la simple conducción eléctrica a través de un cable, como veremos en secciones posteriores.

[22] J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988

[23] John Bekkers. *Resistivity, Axial*, pages 2617–2619. Springer New York, New York, NY, 2015

Ejemplo 4.8.2 **Resistencia del axón**

Calcule la resistencia total R de una porción de 1 cm de largo de axón sabiendo que $\rho_a = 1\,\Omega\cdot\mathrm{m}$ y el radio es $r = 5\,\mu\mathrm{m}$.

SOLUCIÓN

Utilizando directamente (4.67):

$$R = \rho\frac{L}{A} = \rho\frac{L}{\pi r^2} = \frac{(1\,\Omega\cdot\mathrm{m})(1\,\mathrm{m})}{\pi(5\times10^{-6}\,\mathrm{m})^2} \simeq 1{,}3\times10^8\,\Omega \qquad (4.8.2.1)$$

Por comparación, si el cable estuviera hecho de cobre de diámetro razonable para un cable $d = 0{,}08\,\mathrm{mm}$, bastante más grueso que el axón, se necesitarían unos 39 000 km de cable para tener la misma resistencia eléctrica que el axón.

Circuitos

Un circuito eléctrico normalmente tendrá una batería o fuente de alimentación y uno o varios elementos eléctricos con una determinada resistencia[24], conectados por cables. En general la resistencia total de los cables es muy pequeña frente a la resistencia de los demás elementos, por lo que podemos habitualmente considerar que los cables no tienen resistencia. Esto significa que el potencial es igual en todos los puntos conectados por un cable (la diferencia de potencial entre extremos de un cable es $V = IR \approx 0$).

[24] y capacidad, o autoinductancia, etc... pero aquí veremos elementos resistivos solo, salvo en el circuito RC

Vamos a estudiar los circuitos en situación estacionaria (corriente constante) en corriente continua, no alterna. Veamos primero un ejemplo muy sencillo, similar al anterior de la bombilla

Ejemplo 4.8.3 El circuito más simple

La batería del circuito de la figura 4.28 es de 12 V y la resistencia de 120 Ω. Diga cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia y dónde es mayor el potencial en el punto a o b. Calcule la intensidad que recorre el circuito.

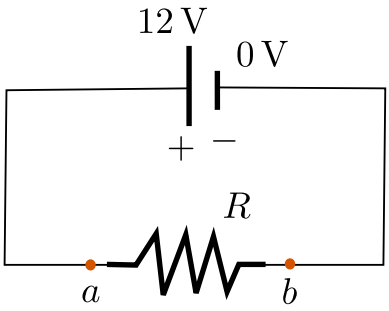


Figura 4.28: Circuito compuesto por una resistencia, una batería y los cables que los unen

SOLUCIÓN

Como interesan solo las diferencias de potencial, podemos tomar el borne negativo de la batería como origen del potencial, esto es $V_- = 0\,\mathrm{V}$. El polo positivo tiene por tanto $V_+ = 12\,\mathrm{V}$.

En los cables no hay caída o diferencia de potencial. De este modo, en el punto a el potencial es el mismo que en el borne positivo de la batería, 12 V. Igualmente, en b el potencial es o. La diferencia de potencial en los extremos de la resistencia es

$$V_{ab} = V_a - V_b = 12\,\mathrm{V} \qquad (4.8.3.1)$$

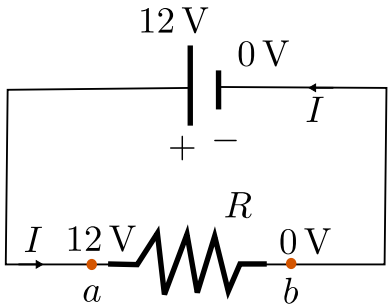


Figura 4.29: Solución del circuito, se indica el valor del potencial en los puntos a y b y el sentido de la corriente

siendo el punto a el que está a mayor potencial. Eso significa que la corriente fluye desde el punto a al b, como por otra parte sabíamos por los polos de la batería. Finalmente calculamos el valor de la intensidad:

$$V_{ab} = IR \Rightarrow I = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{12\,\text{V}}{120\,\Omega} = 0{,}1\,\text{A} \qquad (4.8.3.2)$$

que fluirá del borne positivo al negativo como se muestra en la solución (figura 4.29).

¿Qué ocurre si complicamos el circuito y ponemos 2 resistencias seguidas (en serie)?

Resistencias en serie, circuito equivalente

Supongamos que ahora tenemos el circuito de la figura 4.30 con dos resistencias en serie, de forma que la corriente pasa primero por una resistencia y luego por la otra. ¿Cómo calculamos ahora la intensidad de corriente que circula por el circuito?

Uno podría intentar aplicar la ley de Ohm a la resistencia R_1 por ejemplo. Sin embargo, inicialmente no conocemos la diferencia de potencial aplicada a la resistencia R_1 que sería la diferencia de potencial entre los puntos a y c. Conocemos $V_{ab} = V_a - V_b$ que estará dado por el voltaje de la batería, en este caso, $V_{ab} = V_a - V_b = 12\,\text{V}$, pero este voltaje no sería el correcto para la ley de Ohm en la resistencia R_1 que cumple

$$V_{ac} = V_a - V_c = IR_1 \qquad (4.69)$$

Análogamente, para la resistencia R_2 tenemos

$$V_{cb} = V_c - V_b = IR_2 \qquad (4.70)$$

donde es importante darse cuenta de que la intensidad que circula por ambas resistencias es la misma, al estar colocadas en serie. Sumando ambas ecuaciones tenemos

$$V_{ac} + V_{cb} = V_a - V_c + V_c - V_b = V_a - V_b = V_{ab} = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \qquad (4.71)$$

o bien

$$V_{ab} = I(R_1 + R_2) \Rightarrow I = \frac{V_{ab}}{(R_1 + R_2)} \qquad (4.72)$$

que nos permite calcular la intensidad que circula por el circuito ya que V_{ab} coincide con el voltaje de la batería, en este caso 12 V. Por último, utilizando ahora (4.69) podemos calcular el voltaje en el punto c (V_c) y las diferencias V_{ac} y V_{cb} si fuera necesario.

Es útil pensar en el llamado *circuito equivalente*. Imaginemos que mantenemos la batería pero sustituimos las resistencias R_1 y R_2

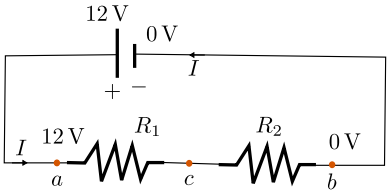


Figura 4.30: Asociación en serie de dos resistencias. La corriente que circula por ambas es la misma.

por una sola que llamaremos resistencia equivalente R_{eq}, como en el circuito de la figura 4.31. ¿Cuánto tiene que valer la resistencia equivalente para que por el circuito equivalente circule la misma corriente que en el que tiene R_1 y R_2? Aplicando la ley de Ohm a esta resistencia equivalente tenemos

$$V_{ab} = IR_{eq} \Rightarrow I = \frac{V_{ab}}{R_{eq}} \tag{4.73}$$

Comparando esta expresión con (4.72) vemos que

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{4.74}$$

A todos los efectos eléctricos podemos sustituir la asociación serie de R_1 y R_2 por una resistencia de valor igual a la suma de ambas.

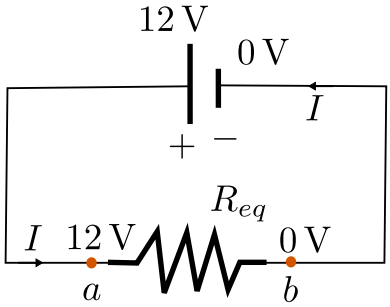


Figura 4.31: Este circuito será equivalente al de la figura 4.30 si tomamos $R_{eq} = R_1 + R_2$.

Si tenemos más resistencias, podemos ir agrupando sucesivamente, de modo que la resistencia equivalente de un conjunto de resistencias R_1, R_2... R_N colocadas en serie será la suma total de todas ellas:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \ldots + R_N \tag{4.75}$$

Resistencias en paralelo, circuito equivalente

Otra posibilidad frecuente es conectar dos resistencias en paralelo, de manera que la intensidad de corriente se divide o reparte entre ambas ramas, pasando en general corrientes distintas por cada resistencia, como en la figura 4.32. Esta es la manera en la que se conectan los aparatos eléctricos en las casas por ejemplo en un ladrón o una regleta.

¿Cómo calculamos la intensidad I que circula por el circuito? ¿y las corrientes I_1 e I_2 que circulan por cada resistencia? Comenzamos con la ley de Ohm

$$V_{ab} = I_1 R_1 \tag{4.76}$$

$$V_{ab} = I_2 R_2 \tag{4.77}$$

donde es importante señalar que la diferencia de potencial en los bornes o extremos de cada resistencia es la misma, y en este caso es conocida porque es directamente la de la batería. Podemos por tanto despejar las intensidades I_1 e I_2:

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \tag{4.78}$$

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \tag{4.79}$$

¿Pero cuánto vale la intensidad total? La conservación de la carga implica que

$$I = I_1 + I_2 \tag{4.80}$$

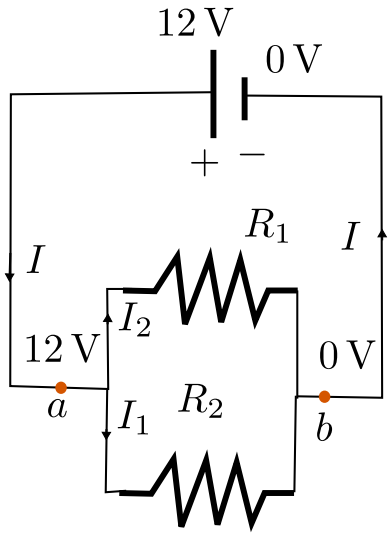


Figura 4.32: Asociación de dos resistencias en paralelo. La diferencia de potencial ($V_{ab} = V_a - V_b$) en los extremos de ambas resistencias R_1 y R_2 es la misma.

Veamos ahora el circuito equivalente. Sustituimos las dos resistencias en paralelo por una sola R_{eq}. ¿Cuánto debe valer R_{eq} para que la intensidad total sea la misma?.

En el circuito equivalente tendremos de nuevo

$$I = \frac{V_{ab}}{R_{eq}}. \tag{4.81}$$

En el circuito original, utilizando (4.80) y (4.79) tenemos

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{4.82}$$

Con estas dos últimas ecuaciones vemos que ambos circuitos son equivalentes si

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.83}$$

Al igual que antes, podemos a todos los efectos sustituir el circuito de dos resistencias en serie de la figura 4.32 por uno con una sola resistencia de valor R_{eq} como en la figura 4.33.

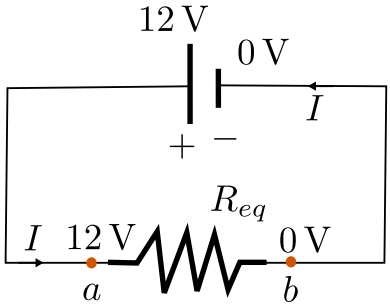


Figura 4.33: Este circuito será equivalente al de la figura 4.32 si tomamos $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Finalmente, si tenemos más resistencias en paralelo sometidas a la misma diferencia de potencial, por ejemplo N resistencias, podemos ir agrupando de dos en dos y el resultado será

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots \frac{1}{R_N} \tag{4.84}$$

de donde se puede calcular el inverso de R_{eq} y después se invierte para obtener el valor de R_{eq}.

Asociaciones de resistencias serie y paralelo

En el caso de que tengamos una combinación más complicada de resistencias, podemos llegar a un circuito equivalente total sustituyendo primero agrupaciones de resistencias en paralelo por su equivalente y luego finalmente todas las que estén en serie por su equivalente serie. Llegar al circuito equivalente nos permite calcular la intensidad que circula por el circuito al completo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.8.4 **Asociación de resistencias**

En el circuito de la figura 4.34, donde $V_{bat} = 24\,\text{V}$, $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ y $R_3 = 1{,}5\,\Omega$ calcule:

a) La intensidad que circula por el circuito

b) La diferencia de potencial aplicada a la resistencia R_2

c) La intensidad de corriente I_2 que circula por el la resistencia R_2

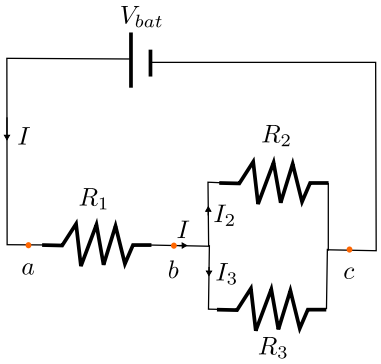


Figura 4.34: Circuito de ejemplo. Son conocidos los valores de las resistencias y el potencial aplicado a todo el circuito.

SOLUCIÓN

Comenzamos agrupando las resistencias en paralelo R_2 y R_3 y sustituyéndolas por su equivalente que llamamos R_{23}:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(2\,\Omega)(1{,}5\,\Omega)}{2\,\Omega + 1{,}5\,\Omega} \simeq 0{,}86\,\Omega \qquad (4.8.4.1)$$

y sustituimos llegando al circuito equivalente de la figura 4.35. Ahora podemos agrupar R_1 y R_{23} que

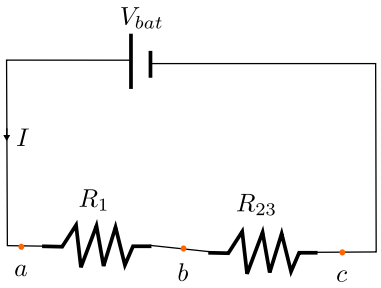


Figura 4.35: **Paso 1**. Circuito equivalente tras sustituir la combinación R_2 en paralelo con R_3 por su resistencia equivalente R_{23}.

están en serie:

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 3\,\Omega + 0{,}86\,\Omega = 3{,}86\,\Omega \qquad (4.8.4.2)$$

quedando el circuito equivalente total como en la figura 4.36. Con esto podemos calcular la intensidad

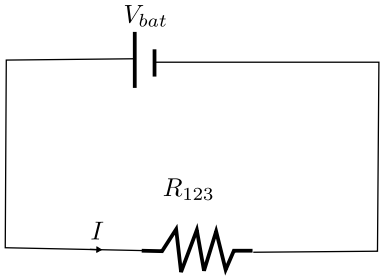


Figura 4.36: **Paso 2.** Circuito equivalente tras haber agrupado todas las resistencias. Ahora es fácil calcular la intensidad total I que recorre el circuito.

que recorre el circuito

$$I = \frac{V_{bat}}{R_{123}} = \frac{24\,\mathrm{V}}{3{,}86\,\Omega} \simeq 6{,}22\,\mathrm{A} \qquad (4.8.4.3)$$

Esta intensidad circula por las ramas sin bifurcar del circuito, como a través de la batería o por la resistencia R_1. Al llegar a las resistencias en paralelo se divide de forma que

$$I = I_2 + I_3 \tag{4.8.4.4}$$

Para calcular por ejemplo la I_2 podríamos aplicar la ley de Ohm a la resistencia R_2

$$V_{bc} = I_2 R_2 \tag{4.8.4.5}$$

teniendo en cuenta que el potencial que se aplica a la resistencia no es el de la batería directamente. Necesitamos calcular esa diferencia de potencial. Una manera es recurrir a la resistencia equivalente R_{23} y el circuito de la figura 4.35. Por la resistencia R_{23} sí circula la intensidad total I y entonces

$$V_{bc} = IR_{23} = (6{,}22\,\text{A})(0{,}86\,\Omega) = 5{,}3\,\text{V} \tag{4.8.4.6}$$

Nótese que en las resistencias R_2 y R_3 cae el potencial 5,3 V. La otra caída de potencial hasta completar los 24 V de la batería ha de producirse en la resistencia R_1 ya que $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$, (puede comprobarse con $V_{ab} = IR_1$). Finalmente, ya podemos calcular I_2:

$$V_{bc} = I_2 R_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_{bc}}{R_2} = \frac{5{,}3\,\text{V}}{2\,\Omega} = 2{,}8\,\text{A} \tag{4.8.4.7}$$

De nuevo, tiene que cumplirse que $I = I_2 + I_3$ de donde podríamos sacar I_3 o bien $V_{bc} = I_3 R_3$. Si está correctamente resuelto ambas deben dar lo mismo para I_3, salvo error de redondeo.

Potencia eléctrica

Cuando una cierta carga circula por un elemento eléctrico de resistencia R, desciende en el potencial (recuerde que $V_{ab} = V_a - V_b = IR > 0$, luego $V_a > V_b$) y pierde energía. Esa energía se utiliza en el aparato para producir el efecto deseado o se pierde en forma de calor, o ambas cosas en general. Recordando la relación entre potencial eléctrico y energía potencial eléctrica, $E_p = qV$, podemos calcular el ritmo de consumo de energía o *potencia* consumida en el elemento eléctrico. La potencia consumida o disipada por un elemento eléctrico por el que circula una corriente I es

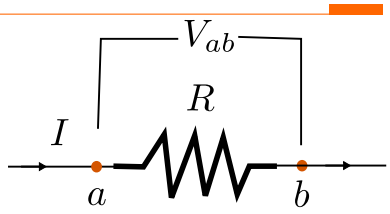


Figura 4.37: La diferencia de potencial V_{ab} en los extremos de la resistencia R hace que circule una intensidad dada por la ley de Ohm $I = \frac{V_{ab}}{R}$. La potencia consumida o disipada en forma de calor es $P = IV_{ab}$.

$$P = \frac{qV_{ab}}{t} = IV_{ab} \tag{4.85}$$

Es fácil ver que la potencia eléctrica tiene en efecto las unidades adecuadas:

$$[P] = [I][V] = 1\,\text{AV} = 1\frac{\text{C}}{\text{s}}\frac{\text{J}}{\text{C}} = 1\,\text{J/s} = 1\,\text{W} \tag{4.86}$$

Además, en la resistencia se ha de cumplir $V_{ab} = IR$, de modo que la potencia se puede expresar de distintas formas, según convenga, sustituyendo bien el potencial o la intensidad en la fórmula de la

potencia. En general, la conservación de la energía impone que un circuito la suma de las potencias consumidas por los elementos ha de ser generada en la batería o la fuente de alimentación que proporciona la diferencia de potencial. Recuerde que en la batería la carga positiva aumenta su energía potencial desde que entra por el borne negativo hasta que sale por el positivo. En último término podemos ver la batería como un conversor de energía química en eléctrica, que luego se utiliza en el resto del circuito.

4.9 *Transmisión del impulso nervioso*

Carga y descarga de un condensador

Como veremos más adelante, la transmisión del impulso nervioso consiste en la despolarización y repolarización de la membrana del axón. Puesto que la membrana tiene una cierta capacidad, cambiar la carga eléctrica acumulada en la membrana es similar a cargar o descargar un condensador.

Si conectamos una batería y un condensador, a través de una resistencia obtenemos un circuito RC en serie, como en la figura 4.38. Al conectar la batería al condensador inicialmente descargado, aparece una corriente eléctrica y el condensador de capacidad C va acumulando carga y aumentando la diferencia de potencial a medida que acumula carga. El proceso se detendrá cuando la diferencia de potencial del condensador iguale al de la batería y la corriente deje de fluir. Esto ocurre en un tiempo que es del orden de magnitud del producto RC:

$$\tau \sim RC \tag{4.87}$$

donde C es la capacidad del condensador y R la resistencia a través de la cual pasa la corriente que llega al condensador. Es fácil comprobar que RC es en efecto un tiempo, aunque a primera vista no lo parece:

$$[R][C] = 1\,\Omega\mathrm{F} \tag{4.88}$$

Recordando las ecuaciones $V = IR$ y $Q = CV$ podemos escribir el "ohmio" y el "faradio" en función de otras unidades

$$[R][C] = 1\,\Omega\mathrm{F} = 1\,\mathrm{V/A} \times \mathrm{C/V} = 1\,\mathrm{C/A} = 1\,\mathrm{C} \times \mathrm{s/C} = 1\,\mathrm{s} \tag{4.89}$$

Al principio el condensador no tiene carga ni diferencia de potencial entre sus placas (recuerde la relación entre diferencia de potencial en un condensador y su carga $Q = CV$). La corriente es muy alta inicialmente y el condensador acumula carga muy rápido. Cuando está casi totalmente cargado, la diferencia de potencial en el

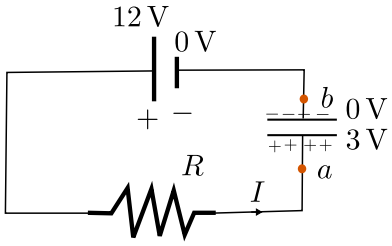


Figura 4.38: Circuito RC en el proceso de carga. Inicialmente el potencial del condensador ($V_a - V_b$) es bajo, la intensidad alta. La corriente que llega al condensador carga las placas del condensador. El potencial del condensador aumenta y se opone al potencial de la batería, reduciendo la intensidad que circula por el circuito. Finalmente, cuando los potenciales se igualan, la corriente es nula y la carga no aumenta más.

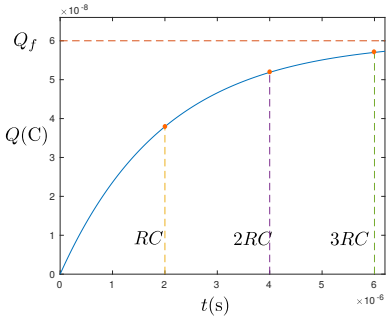


Figura 4.39: Carga de un condensador en un circuito RC serie. $R = 2\,\Omega$ y $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ dan un tiempo de carga $\tau = RC = 2\,\mu\mathrm{s}$. La raya discontinua horizontal marca el valor final de carga $Q_f = CV_{bat}$ con V_{bat} el voltaje aplicado al condensador para cargarlo. Las rayas verticales discontinuas marcan los tiempos $t = \tau$, $t = 2\tau$ y $t = 3\tau$.

condensador es casi igual a la de la batería, pero se opone al sentido de la corriente inicial. Hacia el final de la carga, la corriente es muy baja, casi nula. Esto supone un aumento exponencial[25] de la carga como en la figura 4.39. Como se ve en dicha figura, en un tiempo RC el condensador ha alcanzado aproximadamente el 62 % de la carga final y en $3RC$ prácticamente está totalmente cargado.

La descarga se produce de forma similar. Si conectamos un condensador cargado inicialmente a una resistencia como en la figura 4.40, este se descargará a través de la resistencia, con una corriente inicialmente muy alta e irá disminuyendo a medida que decrecen tanto carga como potencial del condensador. La forma de la curva también es exponencial y el tiempo vuelve a ser del orden de RC. Esto se puede ver en la figura 4.41.

[25] La dependencia exponencial se puede obtener integrando la correspondiente ecuación diferencial, lo que excede del temario del curso

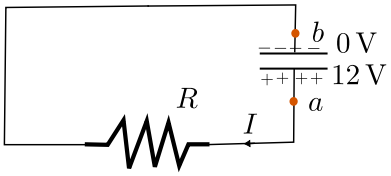


Figura 4.40: Circuito RC en el proceso de descarga. Inicialmente el condensador se cargó utilizando una batería de 12 V y el voltaje del condensador ($V_a - V_b = 12\,\text{V}$). Se establece una corriente alta inicialmente y el condensador se descarga, disminuyendo su carga y potencial de forma exponencial hasta. La carga positiva se traslada a través del circuito hasta la placa negativa compensándose la carga. La descarga finaliza cuando no queda carga en el condensador.

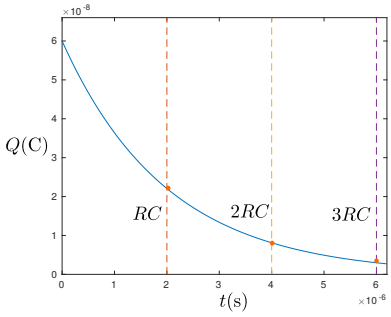


Figura 4.41: Descarga de un condensador en un circuito RC serie. $R = 2\,\Omega$ y $C = 1\,\mu\text{F}$ dan un tiempo de descarga $\tau = RC = 2\,\mu\text{s}$. El condensador comienza con una carga $Q_0 = CV_{bat}$ con V_{bat} el voltaje que se aplicó al condensador para cargarlo inicialmente. Las rayas verticales discontinuas marcan los tiempos $t = \tau$, $t = 2\tau$ y $t = 3\tau$.

Potencial de membrana. Ecuación de Nernst

Como hemos visto, en el interior de la membrana celular hay habitualmente un campo eléctrico. Dependiendo del estado de polarización de la membrana (normal o invertido) el campo eléctrico puede apuntar hacia el interior o hacia el exterior de la célula. Este campo eléctrico supone que hay una diferencia de potencial entre el exterior y el interior, llamado *potencial de membrana*, V_m. El potencial de membrana siempre se expresa como diferencia de potencial interior menos exterior, y es habitual tomar $V_{ext} = 0$, de modo que

$$V_m = V_{int} - V_{ext} \tag{4.90}$$

Como hemos visto anteriormente, si $V_m < 0$ entonces el exterior de la célula está a mayor potencial y el campo apunta del exterior al interior de la célula. Esta es la polaridad normal. En caso de $V_m > 0$, el campo apuntará del interior al exterior. Esta es la polaridad inversa.

En presencia de iones, estos pueden verse arrastrados por el campo eléctrico (en el sentido del campo eléctrico en caso de iones positivos y en contra del campo en caso de iones negativos). En ausencia de otro efecto, esto tendería a acumular iones en uno u otro lado de la membrana. Sin embargo, la agitación térmica produce difusión y los iones tienen otra tendencia a difundir desde las zonas de mayor concentración a zonas de menor concentración. Un ion estará en equilibrio cuando ambas tendencias estén equilibradas. La relación entre las concentraciones y el potencial de membrana que produce el equilibrio está dado por la ecuación de Nernst (ver sección sobre fluctuaciones 3.11).

$$V_{int}^N - V_{ext}^N = \frac{kT}{q} \log \frac{C_{ext}}{C_{int}} \tag{4.91}$$

donde C_{int} y C_{ext} son las concentraciones de un determinado ion, k la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta del sistema, q la carga total de un ion con su signo, y finalmente $V^N_{int} - V^N_{ext}$ es el potencial de membrana al que se daría el equilibrio para ese cierto ion.

Tomemos la situación del ion K^+ reflejada en la figura 4.42. Como está cargado positivamente, el campo eléctrico tiende a introducir iones K^+ en la celda, produciendo un flujo hacia adentro debido al campo eléctrico. Por otro lado, como el potasio se encuentra más concentrado en el interior que en el exterior tiene una tendencia a salir debida a la difusión. Ambas tendencias se equilibran cuando se cumple la ecuación (4.91) tomando los datos del potasio.

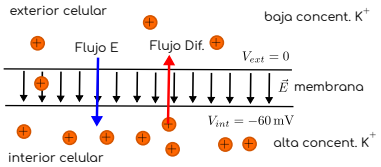


Figura 4.42: Flujos debidos a electricidad (azul) y a difusión (rojo). En este caso el campo eléctrico apunta hacia adentro, arrastrando iones positivos como el potasio hacia el interior. Por otro lado, el potasio está más concentrado en el interior, por lo que se establece un flujo de difusión hacia la zona menos concentrada, en este caso el exterior. Ambos flujos se equilibrarán cuando el potencial de membrana coincida con el potencial de Nernst del ion potasio.

El potencial de membrana es uno solo en cada momento, y en general, para un determinado ion no tiene por qué coincidir con el potencial de Nernst de dicho ion. ¿Para qué nos sirve entonces el potencial de Nernst de un ión? Tiene dos funciones principales, relacionadas,

- Permite saber qué flujo domina para un determinado ion, dadas unas concentraciones y un potencial de membrana
- Indica hacia dónde evolucionaría el potencial de membrana si se dejara circular libremente el ion en cuestión

Para entender esto, basta con pensar que dejado libremente el sistema tenderá hacia el equilibrio. Por otro lado, hay que recordar que un ion positivo crea potencial positivo y uno negativo crea potencial negativo. Así, si entran cargas positivas, esto tenderá a subir el potencial interior hacia más positivo. Si entran cargas negativas, lo modificará hacia más negativo.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.9.1 Potencial de Nernst del Na^+

En una determinada célula, las concentraciones exteriores e interiores del ion sodio son $[Na^+]_{ext} = 145\,\mathrm{mol/m^3}$ y $[Na^+]_{int} = 12\,\mathrm{mol/m^3}$. Si el potencial de membrana es $-90\,\mathrm{mV}$ y la temperatura $T = 37\,^\circ\mathrm{C}$ indique

a) El sentido del flujo debido al campo eléctrico de membrana

b) El sentido del flujo debido a la difusión

c) El sentido del flujo neto si se permite el paso libremente al ion sodio.

SOLUCIÓN

a) Para responder a la primera pregunta, tenemos que ver en qué dirección apunta el campo eléctrico. Puesto que el campo apunta de potenciales mayores a potenciales menores, en este caso de potencial

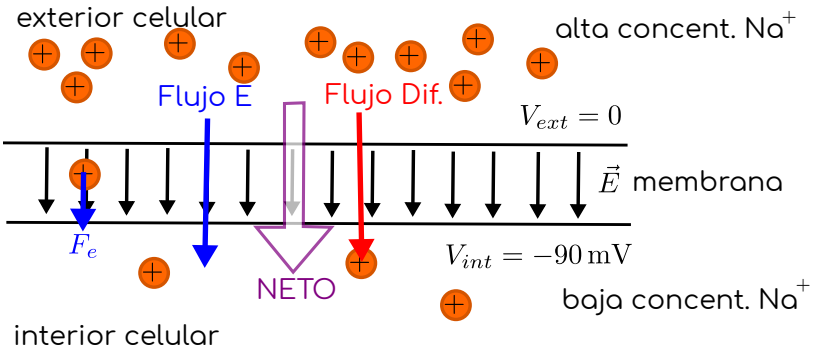


Figura 4.43: Sentido de los flujos por campo eléctrico, difusión y neto.

interior menor que el exterior, el campo apuntará de fuera a dentro. Como el Na^+ es positivo, siente una fuerza en la misma dirección y sentido que el campo, por lo que el Na^+ tiene tendencia a entrar en la célula debido al efecto del campo eléctrico.

b) El flujo de difusión lleva los iones de la zona de mayor concentración a la de menor concentración. En este caso, del exterior al interior. De modo que debido a la difusión el ion Na^+ tiene tendencia a entrar.

c) Puesto que los dos efectos, eléctrico y de difusión, tienden a introducir Na^+ en la célula, el flujo neto irá en el mismo sentido, desde el exterior al interior. Podemos corroborar esto calculando el potencial de Nernst del sodio en estas condiciones

$$V^N_{Na^+} = V^N_{int} - V^N_{ext} = \frac{kT}{q} \log \frac{[Na^+]_{ext}}{[Na^+]_{int}} \tag{4.9.1.1}$$

tomando $q = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $T = 310\,\mathrm{K}$ y las concentraciones señaladas obtenemos

$$V^N_{Na^+} = V^N_{int} - V^N_{ext} = +67\,\mathrm{mV} \tag{4.9.1.2}$$

El sodio estaría en equilibrio con un potencial de membrana positivo (habría entonces campo hacia el exterior y el flujo eléctrico compensaría el de difusión que seguiría siendo hacia dentro). Como el potencial de membrana es inicialmente negativo, para que el sodio consiga llevar el potencial de membrana interior de negativo hacia positivo, tendría que entrar en gran cantidad. El sodio al entrar, al ser cargas positivas, harían subir el potencial hacia +66 mV. Esto corrobora el sentido del flujo neto que hemos deducido anteriormente.

En el ejemplo anterior, ambos flujos apuntaban en el mismo sentido, por lo que ha sido muy fácil establecer el sentido del flujo neto. Veamos cómo discernir el sentido del flujo neto cuando campo eléctrico y difusión producen flujos en sentido contrario.

Ejemplo 4.9.2 Potencial de Nernst del K^+

En una determinada configuración, encontramos ion potasio en con las siguientes concentraciones: $[K^+]_{ext} = 4\,\mathrm{mol/m^3}$ y $[K^+]_{int} = 155\,\mathrm{mol/m^3}$. Para un potencial de membrana $-90\,\mathrm{mV}$ y la temperatura $T = 37\,^\circ\mathrm{C}$ indique

a) El sentido del flujo debido al campo eléctrico de membrana

b) El sentido del flujo debido a la difusión

c) El sentido del flujo neto si se permite el paso libremente al ion potasio.

SOLUCIÓN

a) El potencial es menor en el interior que en el exterior celular, por tanto, el campo eléctrico apunta desde el exterior hacia el interior. El ion K^+ tiene carga positiva, por lo que debido al campo eléctrico se ve arrastrado hacia el interior.

b) La concentración de potasio es mayor en el interior que en el exterior, de modo que debido a la difusión, el potasio tiene tendencia a salir.

c) En este caso, la difusión tiende a sacar el ion, el campo eléctrico a introducirlo. ¿Qué flujo es mayor? Podemos responder calculando el potencial de Nernst del K^+, que nos indica a qué potencial de membrana se equilibran ambos flujos (y no hay flujo neto). Con los datos del enunciado tenemos, para estas concentraciones, con $q = +e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$:

$$V^N_{K^+} = V^N_{int} - V^N_{ext} = \frac{kT}{q} \log \frac{[K^+]_{ext}}{[K^+]_{int}} \simeq -98\,\mathrm{mV} \qquad (4.9.2.1)$$

El ion K^+ estaría en equilibrio en un potencial de membrana de -98 mV. El potencial de membrana en la situación descrita es -90 mV por lo que el potasio se encuentra casi en equilibrio, siendo ambos flujos muy similares en intensidad. No obstante hay una ligera tendencia hacia el equilibrio. Para llevar el potencial de membrana de -90 mV hacia -98 mV transportando un ion positivo como el potasio la única manera es que éste salga del interior, bajando aún más el potencial. Esto nos indica que el K^+ tiene, en esta situación, algo de tendencia a salir. Consecuentemente, además, podemos ver que el flujo que apunta hacia afuera, el de difusión, es necesariamente ligeramente mayor.

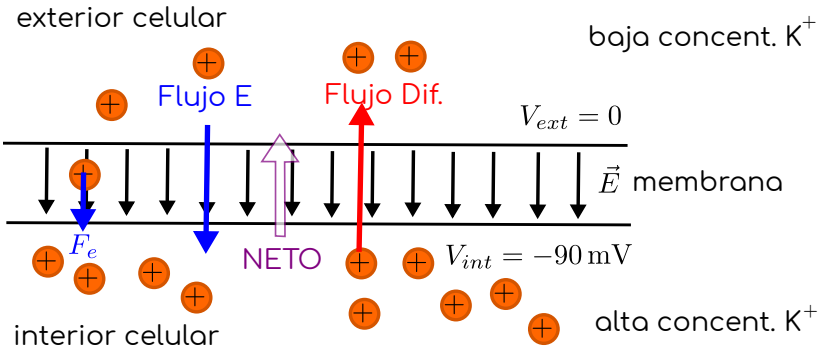


Figura 4.44: Sentido de los flujos por campo eléctrico, difusión y neto.

Veamos también un ejemplo con un ion negativo.

Ejemplo 4.9.3 **Potencial de Nernst del Cl^-**

En una determinada configuración, encontramos ion cloro en con las siguientes concentraciones: $[Cl^-]_{ext} = 120\,\text{mol/m}^3$ y $[Cl^-]_{int} = 4\,\text{mol/m}^3$. Para un potencial de membrana $-90\,\text{mV}$ y la temperatura $T = 37\,^\circ\text{C}$ indique

a) El sentido del flujo debido al campo eléctrico de membrana

b) El sentido del flujo debido a la difusión

c) El sentido del flujo neto si se permite el paso libremente al ion.

SOLUCIÓN

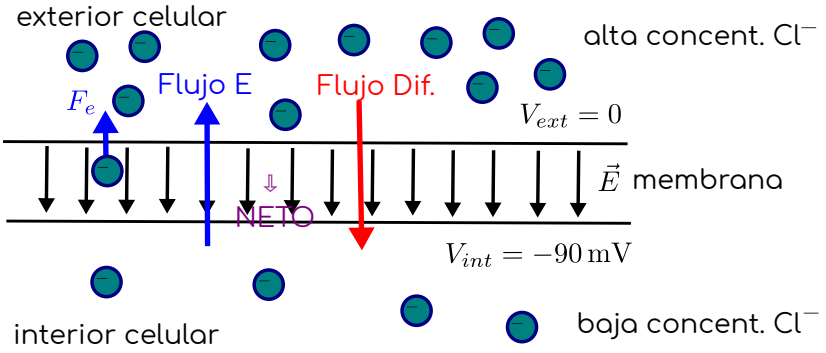


Figura 4.45: Sentido de los flujos por campo eléctrico, difusión y neto.

a) De nuevo el campo eléctrico apunta del exterior al interior. No obstante, al tener el cloro carga negativa, la fuerza que siente apunta en dirección contraria al campo, por lo que el campo eléctrico tiende a extraer iones cloro.

b) El sentido del flujo debido a la difusión de cloro es hacia el interior, como corresponde al hecho de que está más concentrado en el exterior.

c) Ambos flujos tienen sentidos contrarios. Para ver cuál es mayor calculamos el potencial de Nernst para el ion cloro, teniendo en cuenta que ahora $q = -e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$:

$$V^N_{Cl^-} = V^N_{int} - V^N_{ext} = \frac{kT}{q} \log \frac{[Cl^-]_{ext}}{[Cl^-]_{int}} = \frac{(4{,}28 \times 10^{-21}\,\text{J})}{(-1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C})} \log \frac{120}{4} \simeq -91\,\text{mV} \qquad (4.9.3.1)$$

El ion cloro se encuentra casi en perfecto equilibrio, ambos flujos prácticamente igual de intensos. Tiene una ligerísima tendencia a entrar, y llevar el potencial de membrana hacia un poco más negativo.

El potencial de acción

El impulso nervioso consiste en un potencial de acción que despolariza la membrana (invierte los signos de las cargas en el exterior e interior) y se transmite a lo largo del axón. Después, el axón vuelve a polarizarse en la situación normal, con carga positiva en el exterior y negativa en el interior. El campo eléctrico o el potencial de membrana sufren por tanto una inversión durante un breve periodo.

Ion	C_{ext} (mol/m^3)	C_{int} (mol/m^3)
Na^+	145	12
K^+	4	155
Cl^-	120	4
otros(-)	29	163

Tabla 4.1: Concentración de iones en el exterior e interior del axón.

Vamos a estudiar brevemente el potencial de acción. En la situación de reposo, las concentraciones de diferentes iones son como se reflejan en la tabla 4.1. Además el campo eléctrico apunta hacia el interior del axón y el potencial de membrana de reposo es en torno a $-90\,\text{mV}$. Las cargas eléctricas se colocan como en la figura 4.46, con un pequeño exceso de carga positiva en el exterior y negativa en el interior. Las concentraciones de la tabla son exactamente las que hemos usado en los ejemplos de potencial de Nernst de la sección anterior, por lo que las conclusiones que hemos obtenido se aplican aquí también.

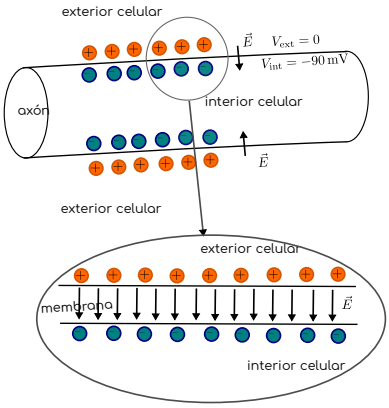


Figura 4.46: Situación de reposo en el axón. Polarización normal.

Supongamos que en el extremo izquierdo del axón producimos un aumento del potencial. Esto puede hacerse con un microelectrodo, o porque llega una onda de despolarización desde la izquierda. Pueden darse dos situaciones, diferentes, dependiendo de si se supera un determinado umbral que, para fijar ideas, vamos a situar en torno a $-50\,\text{mV}$:

- El potencial sube pero no se supera el umbral (por ejemplo sube hasta $-60\,\text{mV}$. Esta perturbación decae y se vuelve a la situación normal.

- El potencial supera el umbral. Entonces se abren los canales de Na^+

Los canales de Na^+ son unas proteínas transmembrana que están controladas por el potencial de membrana. Al superarse el umbral, se abren y dejan fluir libremente al ion Na^+. Mirando la tabla, podemos ver que el ion Na^+ tiene tendencia a entrar en la célula debido a la difusión. Además también entra debido al arrastre por el campo. De este modo hay un gran flujo de ion sodio hacia dentro. La situación es igual que la del ejemplo 4.9.1 como se ve en la figura 4.47. Esta entrada de carga positiva hace aumentar el potencial en dirección hacia el potencial de equilibrio del ion Na^+, que como vimos en el ejemplo es $+33\,\text{mV}$. Esto está representado en la parte naranja de la figura 4.49. Cuando el potencial alcanza un valor suficientemente positivo el ion Na^+ deja de fluir. En ese momento se abren los canales de K^+. El potasio tiene un potencial de equilibrio (de Nernst) que es negativo, en la condiciones de concentración dadas en la tabla y que como calculamos en el ejemplo 4.9.2 es de $-98\,\text{mV}$. Al abrirse los canales, el K^+ sale del axón. La situación del campo y del potasio se representan en la figura 4.48.

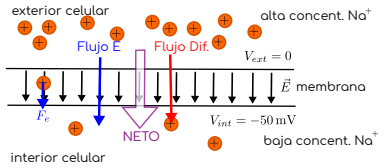


Figura 4.47: Sentido de los flujos por campo eléctrico, difusión y neto del ion sodio al superarse el umbral y abrirse los canales de sodio.

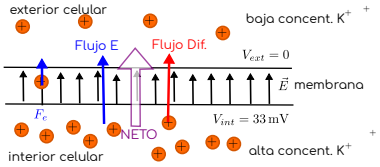


Figura 4.48: Sentido de los flujos por campo eléctrico, difusión y neto del ion potasio cuando se ha producido la inversión del potencial y se abren los canales de potasio.

Al extraer carga positiva del interior, el potencial comienza a disminuir. El flujo de potasio lleva el potencial a valores negativos de nuevo hasta un valor cercano a su potencial de Nernst, $-98\,\text{mV}$. El efecto de la apertura de los canales de K^+ y la bajada del potencial

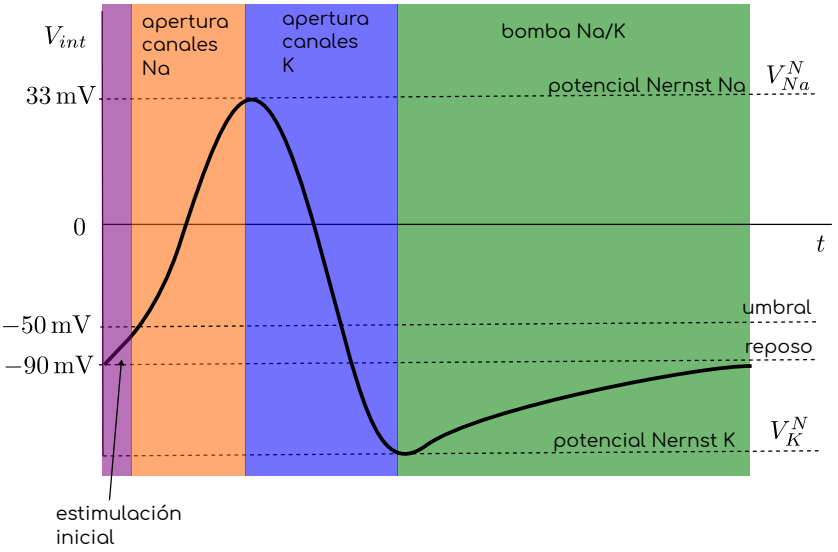


Figura 4.49: Comportamiento del potencial de membrana durante el potencial de acción: estimulación y superación del umbral (morado), apertura de los canales de sodio y flujo de sodio hacia el interior (naranja), apertura de los canales de potasio y flujo de potasio al exterior (azul) y acción de la bomba sodio-potasio (verde). El eje horizontal representa el tiempo.

corresponden a la parte azul de la figura 4.49. Además, la inactivación de los canales de sodio, que se produce hacia el final de la fase marcada como naranja, contribuye a que el potasio pueda repolarizar la membrana[26]. Finalmente tras la hiperpolarización (cuando el potencial es más negativo que el de reposo, al final de la fase marcada en azul) los canales de potasio se cierran.

Por último, con los canales cerrados, la bomba de sodio-potasio devuelve el potencial de membrana a su situación de reposo, como se ve en la parte verde de la figura 4.49. Tras un cierto tiempo los canales vuelven a la situación inicial y el axón puede propagar otra vez un nuevo potencial de acción.

Como resultado se ha generado un pulso de potencial, llamado potencial de acción. Veamos ahora brevemente cómo se propaga a lo largo del axón.

La depolarización (cargas positivas dentro, negativas fuera) de la membrana del axón en una pequeña zona (figura 4.50) provoca una diferencia de potencial en la dirección longitudinal del axón. A su vez esta diferencia de potencial provoca una corriente de carga que avanza a lo largo del axón, transportando carga positiva hacia una zona adyacente. Como resultado, el potencial aumenta en la zona adyacente (en la dirección de propagación del pulso, más a la derecha en la figura). Si esta carga positiva consigue subir el potencial por encima del umbral en la zona colindante, el mismo proceso anterior se desencadena en la nueva zona (apertura canales de sodio, cambio de polaridad, etc...). El potencial de acción se propaga por tanto a lo largo del axón, regenerándose una y otra vez en cada tramo del axón.

[26] El estado inactivo del canal de sodio es al parecer diferente del cerrado, pero tampoco deja circular el sodio en cualquier caso

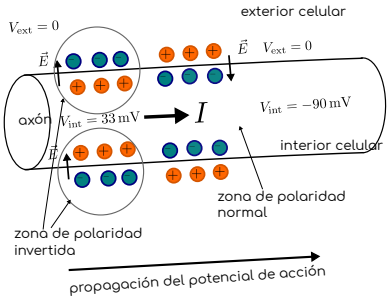


Figura 4.50: Propagación de la inversión de polaridad. La inversión de polaridad provoca una zona de potencial positivo en el interior del axón y por tanto una diferencia de potencial en la dirección longitudinal. A su vez, esta diferencia de potencial establece una corriente, que transporta carga positiva en la dirección longitudinal, propagando la inversión de polaridad.

Esto hace que el potencial se transmita sin atenuarse. Por detrás de la zona de depolarización, los canales de potasio y después la bomba de sodio potasio repolarizan la membrana, devolviendo el potencial de membrana a su valor (negativo) de reposo.

La regeneración del potencial en todos los tramos consume energía y es lenta. Parte de la corriente se transmite a lo largo del potencial, pero mucha se pierde a través de la membrana. En los axones con vainas de mielina, esta impide la pérdida de corriente a través de la membrana y el potencial de acción solo se regenera en los nodos de Ranvier, unas pequeñas zonas de axón entre recubrimientos de mielina sucesivos. Como consecuencia, el impulso es más rápido y consume menos energía. En la siguiente sección vamos a estudiar un modelo extremadamente simplificado para calcular la velocidad de propagación del impulso nervioso en un axón con mielina.

Velocidad de propagación

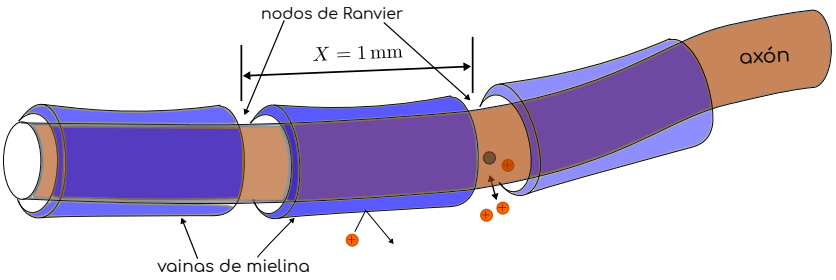


Figura 4.51: Axón con vainas de mielina. Las vainas no dejan pasar los iones, que solo pueden atravesar la membrana en los nodos de Ranvier, donde hay una alta concentración de canales de iones. El potencial de acción solo se regenera en los nodos, aunque la corriente eléctrica si circula por el interior del axón.

Supongamos un axón con vainas de mielina de tamaño X. Supongamos que el potencial de acción se encuentra en un determinado nodo de Ranvier. El potencial de acción se habrá propagado una distancia X cuando consiga provocar su regeneración en el siguiente nodo y la velocidad de propagación será aproximadamente

$$v = \frac{X}{T} \tag{4.92}$$

donde T es el tiempo que tarda el potencial de acción en saltar de un nodo al siguiente. Para propagarse, el potencial debe superar el umbral en el siguiente nodo. Para ello, como hemos visto, el potencial del segmento de axón se depolariza, esto es, se invierte la polaridad (se carga de forma positiva el interior y negativa el exterior).

La membrana del axón se comporta, como hemos visto, como un pequeño condensador de capacidad C. Cambiar la polaridad de un tramo de axón corresponde por tanto a descargar primero, y cargar con la polaridad contraria después, un condensador. Eléctricamente,

este proceso corresponde a un circuito RC, donde el condensador que constituye la membrana se carga a través de la resistencia del axón por una corriente generada por una batería. La batería corresponde a la diferencia de potencial ocasionada por el potencial de acción (ver figura 4.52) entre dos nodos adyacentes.

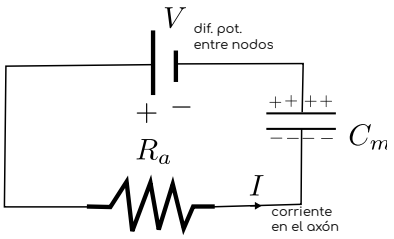


Figura 4.52: Circuito que representa eléctricamente la depolarización del nodo siguiente al que se encuentra el potencial de acción, separados una distancia X. Se muestra el condensador con polarización normal, el potencial de la batería tiende a descargar y después cargarlo con la nueva polaridad.

Como vimos, el tiempo característico de carga o descarga es del orden

$$T \simeq RC \tag{4.93}$$

donde C es la capacidad del tramo de axón de longitud X y R la resistencia a través de la que se carga. Recuerde que la intensidad que produce la depolarización recorre el axón longitudinalmente, por tanto R corresponde también a la resistencia del tramo de axón de longitud X. Teniendo en cuenta la forma cilíndrica de un segmento de axón de radio r y longitud X, su superficie será $A = 2\pi r X$ y la capacidad total (ver sección 4.7):

$$C = C_m 2\pi r X. \tag{4.94}$$

Para la resistencia tenemos [27] (ver ejemplo 4.8.2)

$$R = \frac{\rho_a X}{\pi r^2} \tag{4.95}$$

de donde

$$T = RC = \frac{2\rho_a C_m X^2}{r} \tag{4.96}$$

y la velocidad

$$v = \frac{r}{2\rho_a C_m X} \tag{4.97}$$

¿Cómo se compara esta fórmula con los datos reales? Si tomamos una distancia típica de $X \simeq 1\,\text{mm}$, con los datos de C_m de la membrana con mielina (ecuación (4.61)) y ρ_a típico del axón (ejemplo 4.8.2) tenemos

$$v \approx 10r\,\text{m}/(\text{s}\cdot\mu\text{m}) \tag{4.98}$$

que da la velocidad en m/s al poner el radio del axón en micras. Según los experimentos en axones de gatos[28], se obtiene algo como $v \approx 12r\,\text{m}/(\text{s}\cdot\mu\text{m})$ que es parecido. Lo más interesante son la consecuencias que podemos extraer de este modelo:

1. La mielina aumenta la velocidad también al minimizar la pérdida de corriente a través de la membrana, lo que implica que toda la corriente se utilice para cargar el "condensador" que supone la membrana. La corriente que se pierde a través de la membrana es como una resistencia en paralelo con el condensador de la membrana (figura 4.53), que "roba" corriente al condensador, ralentizando la carga. La mielina suprime dicha corriente transmembrana.

[27] En esta sección seguimos esencialmente el texto de:
J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988
aunque en el citado texto utilizan la resistencia hasta el punto medio del fragmento del axón dando lugar a la mitad de resistencia, para lo que yo no encuentro justificación, excepto, que el resultado se acerca más a lo experimental. No obstante, nosotros tomamos aquí el valor típico de resistividad de $1\,\Omega\cdot\text{m}$ frente a $2\,\Omega\cdot\text{m}$, por lo que el resultado final es el mismo

[28] John B. Hursh. Conduction velocity and diameter of nerve fibers. *American Journal of Physiology*, 127(1):131–139, 1939

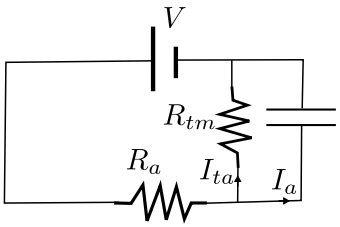


Figura 4.53: Circuito equivalente del axón sin vaina de mielina. Parte de la corriente generada se pierde a través de la membrana I_{tm} y no en depolarizar el siguiente segmento de membrana, ralentizando la transmisión.

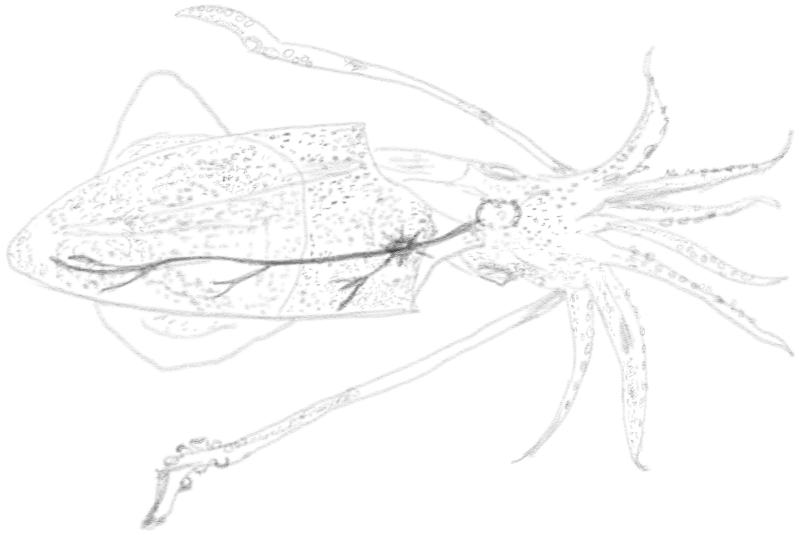


Figura 4.54: Calamar con esquema de su "axón gigante". Hodgkin y Huxley realizaron sus experimentos para dilucidar el mecanismo del potencial de acción con este tipo de axones que alcanzan entre 0,5 mm y 1 mm de diámetro, lo que facilita insertar microelectrodos. Este trabajo les valió el premio Nobel de Fisiología y Medicina. Dibujo de L.D. basado en una foto de *Loligo vulgaris*.

2. El potencial de acción solo se regenera en los nodos, una porción pequeña del axón, de modo que hay menos gasto de energía.

3. Mayor r implica mayor v[29]. Los axones largos, para llevar señales eléctricas a grandes distancias suelen ser más gruesos. Más radio implica mayor superficie y más gasto energético por lo que si no es necesario serán de menor radio, como en el cerebro, por ejemplo. Algunos invertebrados no usan mielina y utilizan axones de gran radio, como el axón gigante del calamar de entre 0,5 mm y 1 mm de diámetro (figura 4.54). Este axón gigante permitió a Hodgkin y Huxley realizar sus estudios sobre la fisiología del impulso nervioso.

4. La velocidad $v \propto \frac{1}{X}$. Menor espaciado de los nodos supone mayor velocidad, pero también mayor gasto energético por el aumento de regeneraciones del potencial de acción. Lo esperable es un X óptimo en el que hay un compromiso entre ambos efectos.

[29] Modelos más complejos dan para los axones sin mielina una dependencia con la raíz cuadrada del radio. Experimentalmente parece confirmarse la dependencia aproximadamente lineal en axones mielinados.

5
Oscilaciones y ondas

5.1 ¿Por qué nos interesan las ondas?

Una parte de la información que nos llega del entorno lo hace en forma de ondas, en particular a través de la luz y el sonido. La luz y el sonido se propagan en forma de ondas, aunque de diferentes características. Por tanto, algunos fenómenos típicos de las ondas, reflexión, refracción y difracción por ejemplo, pueden tener su importancia biológica.

Las diversas modalidades de ojos, los oídos y otros órganos adaptados para la ecolocalización, son extremadamente sofisticados y hacen uso de las posibilidades que ofrecen los fenómenos ondulatorios.

Por otro lado, algunas técnicas experimentales, como la microscopía, también hacen uso de ondas, por lo que conocer las limitaciones a la detección que impone el carácter ondulatorio puede resultar interesante.

Las ondas propagan una perturbación consistente en un movimiento oscilante por lo que empezaremos estudiando el movimiento armónico simple.

5.2 Movimiento oscilatorio armónico simple

El movimiento de vaivén de una masa enganchada en un resorte o de un péndulo es un movimiento oscilante, que se repite cada cierto tiempo, y armónico[1] , esto es, que puede describirse con una función armónica (seno o coseno). En el caso del muelle por ejemplo, si lo desplazamos de su posición de equilibrio, tanto estirándolo como comprimiéndolo, aparece una fuerza recuperadora. Esta fuerza apunta hacia la posición de equilibrio y es más fuerte cuanto más deformamos el muelle. Matemáticamente

[1] si la amplitud es pequeña

$$F = -kx \tag{5.1}$$

donde x es la elongación del muelle respecto de la posición de equilibrio, positivo para un lado y negativo para otro, como en la figura 5.1. El signo menos indica que la fuerza apunta en el sentido contrario al desplazamiento.

La segunda ley de Newton en ese caso nos dice que

$$F = ma \Rightarrow ma = -kx \text{ o bien: } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{5.2}$$

ya que la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto del tiempo. El término $\frac{k}{m}$ que aparece en la ecuación tiene unidades de $1/s^2$ de modo que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.3}$$

es una frecuencia, denominada frecuencia angular del movimiento. La ecuación (5.2) tiene una solución que se puede escribir así[2]:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{5.4}$$

que nos da la posición de la masa m en cualquier instante de tiempo t. La función coseno es periódica, de modo que el movimiento se repite cada cierto tiempo, denominado periodo que se relaciona con la frecuencia angular así:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.5}$$

Otras veces es conveniente hablar de la frecuencia o número de oscilaciones por segundo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.6}$$

que se mide en "hercios" en honor a Hertz y que corresponde a 1 Hz=1/s. El ángulo ϕ que aparece en (5.4) determina la posición inicial de la masa

$$x(t = 0) = A\cos(\phi). \tag{5.7}$$

Por último, A representa la amplitud del movimiento que corresponde a la posición más alejada de la posición de equilibrio que alcanza la masa. La posición está contenida entre A y $-A$:

$$-A \leq x(t) \leq A \tag{5.8}$$

ya que la función coseno toma valores entre -1 y $+1$ incluidos.

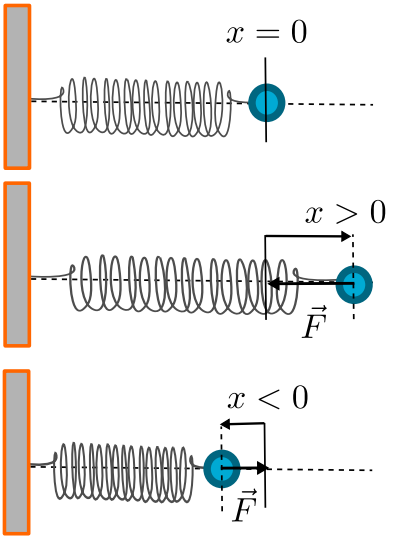


Figura 5.1: Una masa enganchada en un muelle. Cuando se desplaza la masa de la posición de equilibrio del muelle ($x = 0$ en este ejemplo) aparece una fuerza recuperadora que apunta en la dirección del desplazamiento y en sentido hacia la posición de equilibrio.

[2] La resolución de ecuaciones diferenciales está fuera del objeto de este curso. No obstante puede comprobar que la expresión es solución derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación

Opcional.
Para el caso de un péndulo, en lugar de una masa en un muelle, el movimiento tiene las mismas características, pudiéndose igual hablar de amplitud, frecuencia, periodo, etc... y las ecuaciones son las mismas excepto que la frecuencia angular está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5.9}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y l la longitud del cable o cuerda de la que cuelga la masa m. La frecuencia no depende de la masa en este caso.

Energía del movimiento armónico

La fuerza recuperadora de un muelle es conservativa. Consideremos un muelle en su posición de equilibrio. Cuando separamos (estirando el muelle por ejemplo) la masa de su posición de equilibrio, hacemos un trabajo que se acumula como energía potencial, elástica en este caso. Si soltamos la masa, la masa comienza a moverse y la energía potencial se transforma en parte en energía cinética. Matemáticamente, la energía potencial elástica vale:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.10}$$

y si no se aplican más fuerzas sobre la masa, la conservación de la energía dice que

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{cte.} \tag{5.11}$$

El valor de la constante se puede determinar si tenemos información de posición y velocidad en al menos 1 punto cualquiera de la trayectoria. Por ejemplo, sabemos que en el punto de mayor alejamiento $x = A$ la velocidad ha de hacerse 0, de modo que la constante vale $\frac{1}{2}kA^2$ y

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{5.12}$$

como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.1 **Energía total en un movimiento armónico**

Una masa de 200 g está colocada en un muelle de constante recuperadora 3 N/m, en reposo. En un momento dado, se estira el muelle 4 cm respecto de la posición de equilibrio, se sujeta en esa posición durante un instante y se suelta. ¿Cuál es la energía total del movimiento? ¿Qué velocidad llevará cuando pase por su posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

Llamemos $x = 0$ a la posición de equilibrio del muelle.

a) Según el enunciado en la posición inicial será $x = 4\,\text{cm}$ y justo antes de soltarlo, la velocidad es nula $v = 0$. La energía total es

$$E_{\text{total}} = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(3\,\text{N/m})(4 \times 10^{-2}\,\text{m})^2 + 0 = 0{,}0024\,\text{J} \tag{5.13}$$

b) Conocida la energía total, que es constante, podemos deducir la velocidad en cualquier otro punto:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{(2E_{\text{total}} - kx^2)/m} \tag{5.14}$$

y para la posición de equilibrio $x = 0$:

$$v = \sqrt{(2E_{\text{total}} - kx^2)/m} = \sqrt{2E_{\text{total}}/m} \simeq 0{,}15\,\text{m/s} = 15\,\text{cm/s} \tag{5.15}$$

5.3 *Movimiento ondulatorio. Descripción*

Una onda es una perturbación de alguna propiedad que se propaga de forma periódica en el espacio. La onda conlleva un transporte de energía, no de materia. Ejemplos de perturbaciones que se propagan de forma ondulatoria son las variaciones de presión (ondas sonoras, ondas de un terremoto), el campo eléctrico y magnético (ondas de radio, luz), la altura de la superficie de un líquido (ondas en un estanque, las olas del mar), una perturbación del potencial de membrana en la transmisión del impulso nervioso, aunque en este último caso es más apropiado hablar de pulsos separados que de ondas.

Cuando la perturbación en el origen sigue un movimiento armónico simple, lo habitual es encontrar ondas armónicas propagándose.

Descripción de las ondas. Propiedades importantes

Una onda armónica propagándose tiene un aspecto sinusoidal (función seno o coseno) en el espacio. El ejemplo más sencillo es la propagación de una onda en una cuerda (o una manguera) cuando en uno de sus extremos producimos una oscilación armónica. La figura 5.2 representa la forma de la onda en un instante dado. Si no hubiera rozamiento, o si es pequeño, la onda en un instante posterior se desplazará en su dirección de movimiento manteniendo la misma forma. Si nos fijamos en un pequeño segmento de la cuerda en una posición determinada, este seguirá un movimiento similar al de la perturbación del extremo, con su misma frecuencia.

En la figura 5.2 podemos identificar algunas propiedades de las ondas:

- Amplitud A. La amplitud de la onda es la amplitud del movimiento armónico simple que sigue cualquiera de sus puntos, por ejemplo el marcado por el círculo azul en la figura, en el caso de la onda en una cuerda. En el caso de otra propiedad, es el valor máximo que alcanza la perturbación respecto del valor medio, o la mitad del rango completo de oscilación. Sus unidades son las mismas de la propiedad que se propaga (distancia, campo eléctrico, presión, etc...).
- Longitud de onda λ. Es la distancia que separa dos puntos en igual estado de oscilación, por ejemplo la distancia entre dos crestas.
- Periodo T, es el tiempo que dura una oscilación completa en un punto dado (por ejemplo en el círculo azul), o igualmente la separación temporal entre el paso de una cresta y la siguiente por un punto en una posición fija. Es el inverso de la frecuencia de oscilación $f = 1/T$.
- Velocidad de propagación v es la velocidad a la que viaja la onda y que podemos ver como el espacio recorrido por una determinada cresta (la marcada con un círculo verde) en el tiempo de una oscilación completa (como indica por ejemplo el círculo azul). Así:

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ o bien } v = \lambda f \tag{5.16}$$

Estas características son comunes a todas las ondas. Por otro lado, podemos distinguir distintos tipos de ondas en base a cuestiones geométricas. En cuanto a la relación entre dirección de propagación y el movimiento local que producen las ondas pueden ser:

- Transversales. La perturbación se produce en una dirección perpendicular a la dirección de propagación. El ejemplo más claro es una onda en una cuerda. Si está horizontal, la onda se propaga en dirección horizontal, pero cada pequeño segmento de cuerda se desplaza verticalmente. Otro ejemplo es las ondas electromagnéticas o las ondas en un estanque.
- Longitudinales. La perturbación provoca desplazamiento en la misma dirección de propagación. Por ejemplo, una perturbación de compresión y distensión en un muelle. También el sonido es una onda longitudinal.

Según la geometría podemos tener ondas unidimensionales (en una cuerda, en un instrumento de viento), ondas en dos dimensiones (ondas en una membrana tensa, como en un tambor) u ondas en 3 dimensiones, como el sonido en el agua. En 3D podemos tener ondas

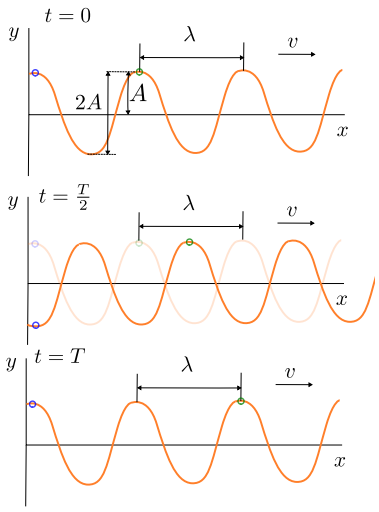


Figura 5.2: Propiedades y propagación de ondas. El círculo azul marca el estado de la oscilación en un punto fijo. El círculo verde marca la posición de la misma cresta en distintos instantes de tiempo.

planas u esféricas (u otras) según la forma de los frentes de onda. Un frente de onda es el lugar geométrico de los puntos en igual estado de oscilación.

Si la onda se propaga a la misma velocidad en todas direcciones, cerca de la fuente los frentes de onda son esféricos[3]. Lejos de la fuente, como las esferas se van haciendo de mayor radio, tienen aspecto de planos si nos fijamos en una pequeña parte del frente y se suelen considerar ondas planas (figura 5.3).

[3] A veces se considera que se propagan principalmente en un sentido y no en el contrario y se consideran solo semiesféricas

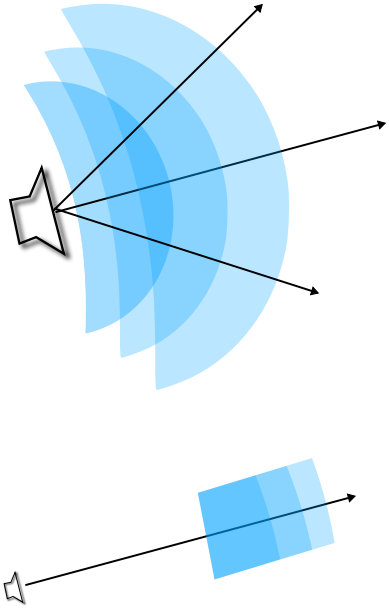


Figura 5.3: **Arriba**. Frentes de ondas esféricos (solo se representa una parte del frente). Las líneas negras representan direcciones de propagación (o rayos) y son perpendiculares al frente de ondas. **Abajo**. Lejos de la fuente, los frentes esféricos tienen tanto radio que se suelen considerar planos. El rayo indica la dirección de propagación y es perpendicular a los frentes de onda.

5.4 *Energía, potencia e intensidad de una onda*

Energía

Una onda transmite una oscilación que lleva asociada una energía. Pensemos en un pequeño trozo de materia de masa m que se pone en movimiento al pasar una onda armónica y realiza un movimiento armónico simple. Su energía será

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{5.17}$$

donde A es la amplitud de movimiento. Podemos expresar la constante k utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.6) como

$$k = 4\pi^2 m f^2 \tag{5.18}$$

de donde

$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2 \propto A^2. \tag{5.19}$$

La energía transmitida es proporcional a la amplitud de la onda al cuadrado. Para dos ondas de la misma frecuencia f, o para la misma onda en dos puntos del espacio donde tenga diferente amplitud, podemos escribir

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \tag{5.20}$$

Potencia

La potencia transportada por la onda es igualmente proporcional a la amplitud al cuadrado

$$P = \frac{E}{t} \propto A^2 \tag{5.21}$$

Intensidad

En muchas situaciones interesa conocer la energía que atraviesa una superficie dada (por ejemplo, la superficie de un detector u

órgano sensorial) por unidad de tiempo y superficie. Se denomina intensidad de la onda

$$I = \frac{E}{tS} = \frac{P}{S} \propto A^2 \tag{5.22}$$

Las unidades de la intensidad son

$$[I] = \frac{[P]}{S} = 1\,\mathrm{W/m^2} \tag{5.23}$$

Veamos algunas consecuencias de estas relaciones. En la transmisión de una onda, esperamos que la energía se conserve aproximadamente[4] de modo que la potencia es constante en la propagación. Pensemos en una fuente de onda (un altavoz, una bombilla...) que emite con una potencia dada P y en todas direcciones por igual. La onda será aproximadamente esférica. A una distancia r de la fuente, la energía (y la potencia) debe repartirse en una superficie esférica de área $S = 4\pi r^2$. La intensidad valdrá a distancia r

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{5.24}$$

La intensidad de la onda decrece a medida que nos alejamos de la fuente (con el cuadrado de la distancia). La onda se atenúa. Por ejemplo, para una onda esférica, conocida la intensidad en un punto I_1 que dista de la fuente r_1 podemos calcular la intensidad en cualquier otro punto a distancia r_2:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{P}{4\pi r_2^2}\frac{4\pi r_1^2}{P} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow I_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1 \tag{5.25}$$

La intensidad decrece a medida que nos alejamos de la fuente[5]

Otra forma de verlo es en relación con la amplitud de la onda. Dado que para una onda de una determinada frecuencia la intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado, tenemos que

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{A_1^2}{A^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow A_2 = \frac{r_1}{r_2} A_1 \tag{5.26}$$

donde vemos que si $r_2 > r_1$ entonces $A_2 < A_1$, decrece la amplitud a medida que nos alejamos de la fuente.

5.5 *Volumen e intensidad en ondas sonoras*

El volumen con el que percibimos una onda sonora está relacionado con la amplitud o la intensidad de la onda. A mayor intensidad, mayor volumen. No obstante, la relación no es lineal si no más bien logarítmica, por razones relacionadas con la fisiología del oído[6]. Se define el volumen o nivel de intensidad β como

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \tag{5.27}$$

[4] En general una parte de la energía de la onda puede disiparse en forma de calor en el medio por fenómenos disipativos

[5] Veremos en la siguiente sección la relación entre intensidad y volumen en las ondas de sonido

[6] Parece ser que en efecto en la mayoría de los sentidos la relación entre estímulo y sensación percibida es logarítmica. Esto se denomina la ley de **Weber-Fechner**. La razón última no está clara, pero permite tener un "sensor" que detecta fiablemente señales en un rango de 12 órdenes de magnitud de intensidad, en el caso del oído, por ejemplo.

donde I_0 es una intensidad que representa el umbral de percepción, la menor intensidad de onda que es posible detectar. En el aire, para el oído humano se establece[7] en $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$. Veamos con un ejemplo las consecuencias de que el volumen sea logarítmico.

[7] Si utilizamos la definición de β, ¿a qué volumen corresponde una intensidad $I = I_0$?

Ejemplo 5.5.1 Doblamos la intensidad

Un determinado sonido se recibe inicialmente una intensidad de $I_1 = 10^{-6}\mathrm{W/m^2}$. En un determinado momento se duplica la intensidad. Compare el volumen inicial y final.

SOLUCIÓN

El nivel de intensidad o volumen inicial será

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = 10\log_{10}\frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 60\,\mathrm{dB} \tag{5.5.1.1}$$

Al doblarse la intensidad, tenemos $I_2 = 2\times 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$

$$\beta_2 = 10\log_{10}\frac{I_2}{I_0} = 10\log_{10}\frac{2\times 10^{-6}}{10^{-12}} \simeq 63\,\mathrm{dB} \tag{5.5.1.2}$$

es decir, tres decibelios más.

Veamos ahora cómo se atenúa el volumen en una onda esférica.

Ejemplo 5.5.2 Atenuación de una onda esférica

¿A qué distancia dejará de oírse una conversación que a 50 cm de distancia tiene un volumen de 60 dB? Suponga que la conversación se propaga en todas direcciones por igual formando una onda esférica.

SOLUCIÓN

El límite de audición humana está aproximadamente en $I_0 = 1\times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$. Tenemos que calcular a qué distancia la intensidad de la onda ha disminuido hasta ese nivel. Calculamos primero cuál es la intensidad inicial.

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0} \Rightarrow I_1 = I_0\times 10^{\beta_1/10} = (1\times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2})(10^6) = 1\times 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2} \tag{5.5.2.1}$$

De esta intensidad, podemos deducir la potencia de la fuente sonora suponiendo que se reparte en una superficie esférica

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \Rightarrow P = 4\pi r_1^2 I_1 \tag{5.5.2.2}$$

donde $r_1 = 1\,\mathrm{m}$. Si la energía se conserva, la potencia total de la onda es constante pero se reparte en una superficie esférica más grande cuanto más lejos estamos de la fuente. La intensidad I_2 de la onda a otra distancia r_2 se obtiene de la igualdad de la potencia

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2 \tag{5.5.2.3}$$

o si nos interesa la distancia

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2 \Rightarrow r_2^2 = r_1^2 \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow r_2 = r_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \tag{5.5.2.4}$$

Si tomamos para la segunda intensidad la potencia más pequeña que podemos detectar con el oído $I_2 = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$, la distancia correspondiente es

$$r_2 = (0{,}5\,\mathrm{m}) \sqrt{\frac{(1 \times 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2})}{(1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2})}} \simeq 500\,\mathrm{m} \tag{5.5.2.5}$$

La distancia es muy grande para ser realista, aunque hay que considerar que en el mundo real hay otros muchos ruidos que taparían la conversación, obstáculos y probablemente pérdidas de energía en la propagación del sonido.

5.6 *Intensidad de la onda y la superficie de detección*

Es interesante explorar el concepto de intensidad de la onda en relación con la detección. Tanto las ondas sonoras como lumínicas pueden ser detectadas por órganos especializados en los animales, o por aparatos diseñados por el hombre a tal efecto, aportando gran cantidad de información. El órgano (o aparato) detector presenta una cierta área donde se recoge la onda y se produce directamente la conversión en una señal transmisible al cerebro (como en la retina) o bien se canaliza hacia el órgano que hará la conversión (como en el pabellón auricular). Si la onda llega al órgano detector con una cierta intensidad, la energía total por unidad de tiempo (potencia) recogida será mayor según el área de detección:

$$P_{\text{recogida}} = I A_{\text{detector}} \tag{5.28}$$

Utilizando las unidades, esto se ve claramente

$$[I][A] = 1\,\mathrm{W/m^2} \times \mathrm{m^2} = 1\,\mathrm{W} \tag{5.29}$$

Cuanto mayor sea la potencia recogida, más fácil será la detección de la señal. Por esta razón, una manera de aumentar la sensibilidad del detector es aumentar la superficie de detección, lo cual se aplica desde el diseño de telescopios a los ojos u orejas de los animales. Si la intensidad lumínica en el entorno es muy baja, como ocurre con los animales de hábitos nocturnos, una posible solución es desarrollar unos ojos grandes (figura 5.4).

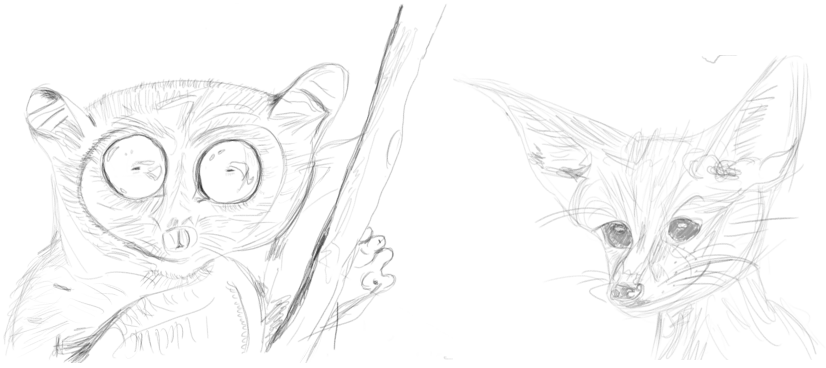


Figura 5.4: El tarsero filipino (*Carlito syrichta*) y el feneco (*Vulpes zerda*) poseen órganos detectores de ondas con gran superficie de captación. Dibujo de L.D.

5.7 *Fenómenos ondulatorios típicos*

En esta sección estudiaremos los fenómenos de reflexión, refracción y difracción, aplicables a las ondas en general. Para la reflexión y la refracción es conveniente definir el concepto de *rayo*. Un rayo es una línea perpendicular al frente de onda en todo punto e indica la dirección de propagación. Por ejemplo, en la propagación en 2D de una onda en todas direcciones desde una fuente puntual (ondas en la superficie de un lago), los frentes de onda son circulares y los rayos radiales, como en la figura 5.5. En una onda plana, los rayos son perpendiculares a los planos (3D) o líneas (2D) de los frentes de onda (figura 5.6).

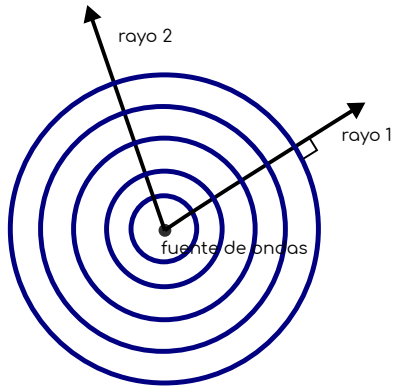


Figura 5.5: Dos rayos indicados en una onda circular. Los círculos azules representan los frentes de onda.

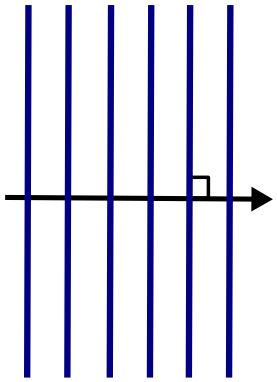


Figura 5.6: Lejos de la fuente las ondas son aproximadamente planas. El rayo es siempre perpendicular a los frentes de onda.

Reflexión

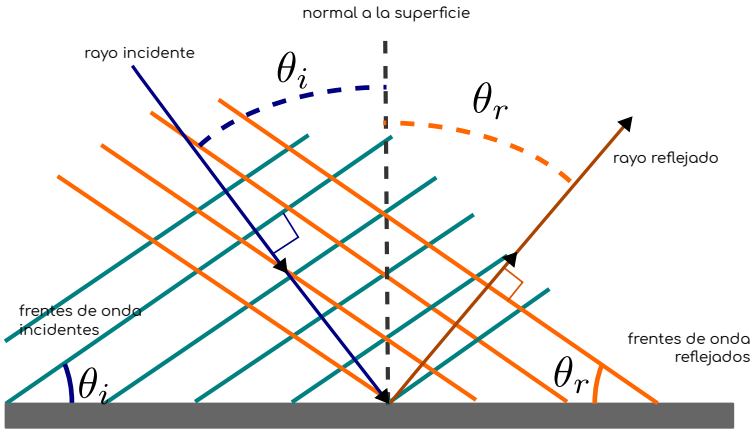


Figura 5.7: Reflexión. Tanto los frentes de onda como los rayos ven la componente perpendicular a la superficie de su velocidad cambiada de signo (en este caso la componente vertical). El resultado es que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión ($\theta_r = \theta_i$). El rayo sigue una trayectoria similar a la que seguiría una partícula que rebotara elásticamente contra la superficie, como una bola de billar contra la banda, por ejemplo.

Cuando una onda se encuentra con un obstáculo (o medio) en el que no se puede propagar, se refleja, volviendo a propagarse por el medio. En una reflexión perfecta sobre una superficie plana bien pulida, la componente de la velocidad propagación de la onda en

la dirección perpendicular a la superficie cambia de signo. Esto ocurre tanto para los frentes de onda como con los rayos. El resultado es que el ángulo de incidencia del rayo respecto de la normal θ_i a la superficie es igual que el ángulo del rayo reflejado θ_r (también respecto de la normal):

$$\theta_r = \theta_i \tag{5.30}$$

En una situación general es posible que una parte de la onda sea reflejada y otra transferida a través del medio, como sucede cuando una onda lumínica atraviesa un vidrio.

Refracción

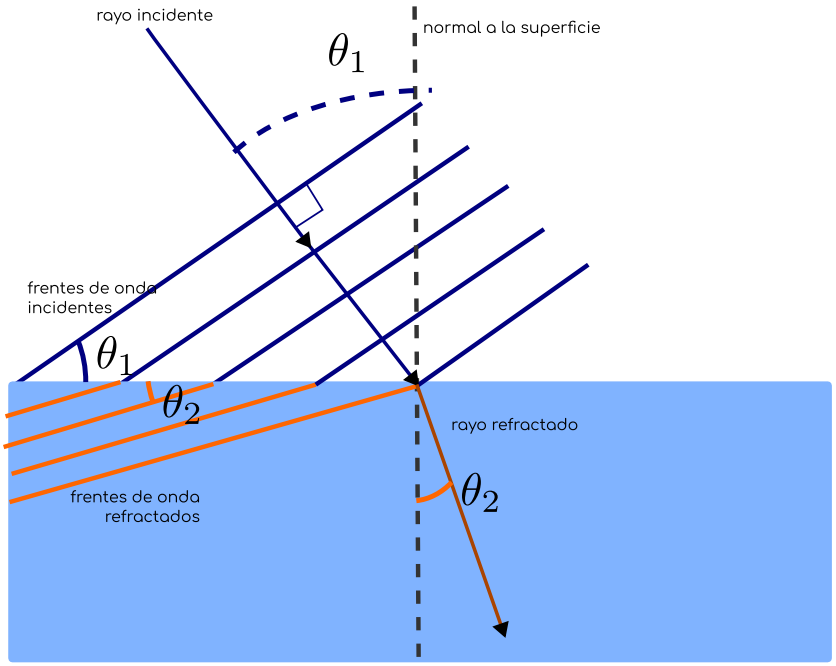


Figura 5.8: Refracción. Rayos incidente y refractado y frentes de onda en la refracción. En el ejemplo concreto la onda se propaga a menor velocidad en el medio azul.

Cuando una onda cambia de medio a uno en el que la velocidad de propagación es diferente, la dirección de propagación se modifica. Este fenómeno se conoce como refracción. Si la onda entra en un medio en el que la velocidad es menor, como sucede en la figura 5.8 (los frentes de ondas aparecen más juntos), el rayo se acerca a la normal. El ángulo de refracción θ_2 es menor que el de incidencia θ_1 ambos medidos respecto a la normal. Si la onda pasa a un medio de mayor velocidad de propagación, sucede lo contrario. Podemos encontrar una relación entre los ángulos de incidencia y refracción. Si nos fijamos en detalle en un frente de onda que avanza durante

un tiempo t determinado, como en la figura 5.9, vemos que hay 2 triángulos rectángulos que nos permiten escribir

$$\sin\theta_1 = \frac{l_1}{a} \tag{5.31}$$
$$\sin\theta_2 = \frac{l_2}{a} \tag{5.32}$$

donde l_1 y l_2 son las distancias recorridas por el frente en el tiempo t en el medio de incidencia y refracción respectivamente. a es la hipotenusa en ambos triángulos. En el medio incidente la onda se desplaza a velocidad v_1 y tras refractarse se desplaza a v_2, de modo que

$$l_1 = v_1 t \tag{5.33}$$
$$l_2 = v_2 t \tag{5.34}$$

Sustituyendo en (5.31) y (5.32), despejando a e igualando, se llega a la Ley de Snell de la refracción:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{5.35}$$

La ley de Snell corrobora que efectivamente

- Si $v_2 < v_1 \Rightarrow \sin\theta_1 > \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_1 > \theta_2$, esto es si la velocidad es menor en el segundo medio, el rayo se acerca a la normal, y
- si $v_2 > v_1 \Rightarrow \sin\theta_1 < \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_1 < \theta_2$, esto es si la velocidad es mayor en el segundo medio, el rayo se aleja de la normal al refractarse.

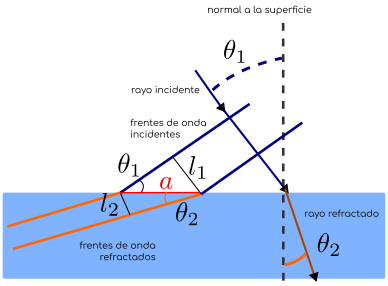


Figura 5.9: Detalle de los triángulos que aparecen en la refracción y permiten deducir la ley de Snell.

Refracción de las ondas de luz. Índice de refracción

Para las ondas lumínicas se define el índice de refracción de un determinado medio (aire, agua, vidrio...) como la relación entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de propagación de la luz en el medio v:

$$n = \frac{c}{v} \tag{5.36}$$

con $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \simeq 3{,}0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$. El índice de refracción de un medio no tiene unidades (es una relación) y es siempre mayor que 1. Podemos reescribir la ley de Snell (5.35) en función del índice de refracción

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{cv_1}{cv_2} \Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{5.37}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción en el medio incidente y de refracción respectivamente. Reorganizando términos queda

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{5.38}$$

que es fácil de recordar y es la forma habitual de la ley de Snell.

Lentes y ojos

La refracción es un fenómeno crucial en las lentes, que permiten la formación de imágenes al enfocar los rayos de luz hacia el plano en el que se acumulan las células fotorreceptoras. Aunque existe gran variedad de ojos en el mundo animal, con y sin lentes, en los vertebrados (y algunos invertebrados) la morfología habitual es la de una cavidad con células fotorreceptoras en uno de sus extremos y una lente que forma la imagen sobre ellas. Para ello, las lentes han de estar compuestas de un material transparente con un índice de refracción lo suficientemente alto como para producir una modificación apreciable de la trayectoria de los rayos. En qué posición se forma la imagen depende de la distancia focal de la lente. La distancia focal (o su inverso, la potencia en dioptrías) está determinada por la curvatura de la lente y por su índice de refracción. En la figura 5.10 se representa un diagrama de la óptica geométrica básica en la formación de imagen en un ojo. Aunque es habitual estudiar el

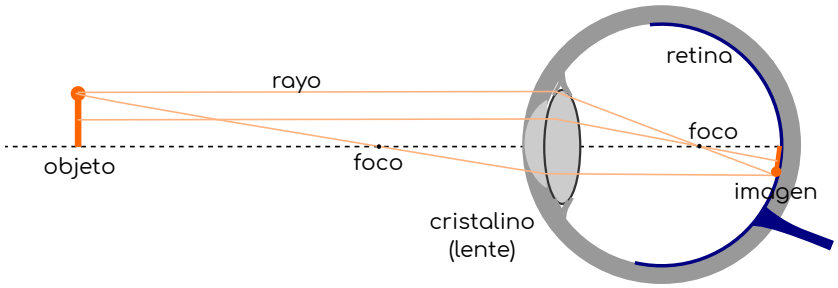


Figura 5.10: Esquema de ojo y formación de imagen. Se representa la retina, donde están las células receptoras de luz y el cristalino que actúa como lente. Los rayos que parten del objeto son refractados por la lente y convergen sobre la retina donde se forma una imagen nítida del objeto. A modo de ejemplo, se representan dos rayos de luz que parten de la parte superior del objeto y otro que se emite desde una parte intermedia.

cristalino como una lente delgada, en realidad el humor vítreo que rellena el ojo entre el cristalino y la retina tiene un índice de refracción muy parecido al del cristalino, por lo que en la segunda superficie del cristalino hay poca refracción (los rayos se desvían poco); casi toda la refracción se produce en el lado externo del ojo. Por otro lado, el índice de refracción similar entre cristalino y humor vítreo hace que la transmisión de la onda entre ambos se produzca con poca reflexión y una fracción muy alta de la intensidad (mayor del 99 %) sea transmitida hacia la retina.

Difracción

La difracción de las ondas ocurre en general cuando un frente de ondas encuentra un obstáculo parcial en su camino. Cuando se produce difracción, las ondas parecen rodear en cierta manera los obstáculos y pueden llegar a zonas en principio en la sombra geométrica del obstáculo (zonas sin línea de visión directa a la fuente de las

ondas). En la figura 5.11 se ve cómo una zona que en principio no recibiría luz (por ejemplo) puede aparecer algo iluminada por efecto de la difracción. La difracción está íntimamente ligada a la interferencia, y en la zona iluminada en la zona de sombra geométrica es posible observar un patrón de interferencia.

Para entender el origen de la difracción, pensemos en una onda plana que encuentra un obstáculo con un pequeño agujero, del tamaño aproximado de la longitud de onda, como en la figura 5.12. Al llegar la onda, tal y como vimos en la sección 5.3, el medio en la región del agujero seguirá un movimiento oscilatorio de la misma frecuencia que la onda. Este pequeño elemento vibrante se convierte a su vez en una fuente de ondas, y si es pequeño, será aproximadamente puntual, dando lugar a una onda semiesférica (o semicircular) a su vez. En el caso de que el agujero tenga un tamaño mayor, actuará en general como varias fuentes diferentes y el resultado de la onda "aguas abajo" será más complicado, pero el principio que produce la difracción es similar.

Aunque para la luz visible el fenómeno de difracción no es sencillo de observar con el ojo desnudo, con el sonido no es extraño que tengamos situaciones como la descrita en la figura 5.11. Por ejemplo, es fácil escuchar a una persona que no podemos ver detrás de un obstáculo como un muro (incluso prescindiendo de rebotes). La razón es la muy diferente longitud de onda de la luz y el sonido[8]. La longitud de onda de la luz visible es del orden de 1×10^{-7} m, mientras que para el sonido es de aproximadamente 1 m. Los efectos de la difracción son grandes para obstáculos o apertura comparables con la longitud de onda[9]. Resumiendo para un objeto o apertura de tamaño L y una onda de longitud de onda λ:

- Si $L \gg \lambda \Rightarrow$ no se percibe difracción, no se rodea el obstáculo y la zona de sombra corresponde con la sombra geométrica.
- Si $L \ll \lambda \Rightarrow$ la onda no "ve" el obstáculo, prácticamente pasa sin verse perturbada, como por ejemplo un pequeño corcho en un estanque que no perturba apenas las ondas superficiales que pasan a su través.
- Si $L \sim \lambda \Rightarrow$ la difracción es importante.

De esta manera, los efectos de difracción marcan el límite (por abajo) de tamaño de objeto que se puede detectar con una onda. Por ejemplo, la luz del espectro visible tiene una longitud de onda en torno a 0,5 µm (depende del color) y eso hace que este sea el límite aproximado de lo que podemos ver con un microscopio óptico. Esta idea se explora en el siguiente ejemplo.

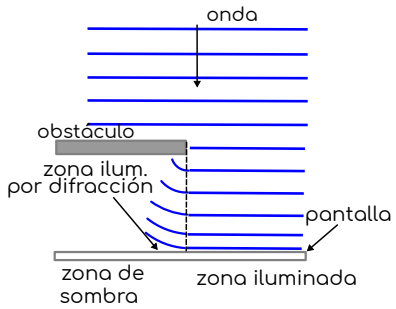


Figura 5.11: Un frente de ondas plano encuentra un obstáculo. La onda parece rodear el obstáculo.

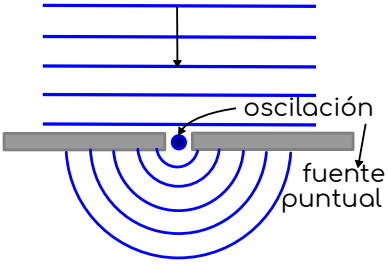


Figura 5.12: Un frente de ondas plano encuentra un obstáculo con un agujero del tamaño aproximado de la longitud de onda. El medio que ocupa la posición del agujero oscila cuando llega el frente plano de la onda. Esta pequeña región se comporta por tanto como un emisor y si es pequeño, como una fuente puntual de ondas generando una onda circular o esférica (según la dimensión).

[8] Por supuesto, esta no es la única diferencia entre luz y sonido. El sonido es una onda de presión en un medio material y la luz una onda electromagnética.

[9] J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988

Ejemplo 5.7.1 Ecolocalización

Algunas especies de murciélagos utilizan para la ecolocalización ondas sonoras de frecuencia 80 kHz, correspondientes a ultrasonidos. Las ballenas por el contrario utilizan infrasonidos, de longitud de onda aproximada de 10 Hz. ¿Cuál es el límite aproximado de tamaño de los objetos que pueden localizar mediante el sonido?

SOLUCIÓN

El límite viene dado aproximadamente por la longitud de onda. Podemos calcular la longitud de onda a partir de la velocidad del sonido y la frecuencia:

$$L \approx \lambda = \frac{v}{f} \tag{5.7.1.1}$$

Para el murciélago, tomando la velocidad del sonido en el aire como $v = 340\,\mathrm{m/s}$,

$$L \approx \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\,\mathrm{m/s}}{80 \times 10^3\,\mathrm{Hz}} = 4{,}25 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \approx 4\,\mathrm{mm}. \tag{5.7.1.2}$$

Es interesante notar que ese es el tamaño aproximado de un insecto, presa habitual de un murciélago. Mientras que para la ballena, con una velocidad del sonido en el agua de $v = 1500\,\mathrm{m/s}$

$$L \approx \frac{v}{f} = \frac{1500\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{Hz}} = 150\,\mathrm{m} \tag{5.7.1.3}$$

que puede corresponder aproximadamente con el tamaño de los bancos de krill.

Microscopía óptica de superresolución

Como hemos dicho, cuando la separación entre dos puntos de nuestra muestra en el microscopio es comparable a la longitud de onda λ de la luz visible, resulta difícil discernirlos, debido a los efectos de difracción. En concreto, se suele utilizar el llamado *criterio de Rayleigh* que establece que la mínima separación d que puede distinguirse, esto es, la resolución del microscopio es

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin\theta} \tag{5.39}$$

donde n es el índice de refracción del medio y θ el ángulo que subtiende la muestra con el objetivo. En condiciones favorables $n \sin\theta$ (llamado apertura numérica del microscopio) será del orden de 1, de modo que

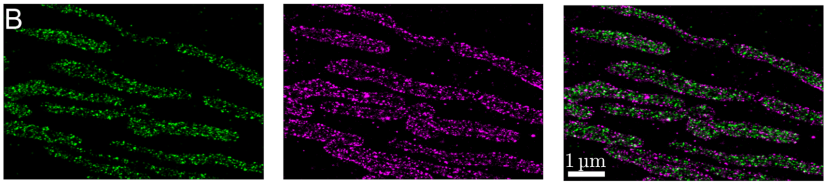
$$d \approx \frac{\lambda}{2} \tag{5.40}$$

sin tener en cuenta otros problemas como aberraciones de las lentes, razón por la que en la sección anterior hemos sido conservadores y tomado $d \sim \lambda$ como orden de magnitud. Para luz visible (por

ejemplo, tomando la zona intermedia del espectro verde $\lambda \simeq 500\,\text{nm}$) tenemos aproximadamente

$$d_{\text{óptico}} \approx 250\,\text{nm} \tag{5.41}$$

Durante mucho tiempo se pensó que este límite no se podría superar utilizando microscopía óptica. Sin embargo, en años recientes, gracias a la microscopía de fluorescencia y a técnicas como PALM o STORM se han conseguido resolver estructuras de tamaños aún menores y obtener imágenes de microscopio óptico de objetos de estructuras biológicas, sobre todo proteínas, de tamaño de algunas decenas de nanometros!! La resolución de la técnica STORM está generalmente en el rango de los $20 - 30\,\text{nm}$. En la figura 5.13 adaptada de [10] se observa localización de las proteínas Tom20 y ATP-sintasa de la membrana de la mitocondria y los autores aseguran que obtienen un tamaño de pixel de 10 nm.



[10] Johnny Tam, Guillaume Alan Cordier, Joseph Steven Borbely, Ángel Sandoval Álvarez, and Melike Lakadamyali. Cross-talk-free multi-color storm imaging using a single fluorophore. *PLOS ONE*, 9(7):e101772, 2014

Figura 5.13: Imagen de microscopía STORM (stochastic optical reconstruction microscopy) de la proteína Tom20 (aprox. 15 nm) de la membrana externa de la mitocondria (magenta) y de la proteína de la membrana interna ATP-sintasa (aprox. 10 nm)(en verde). La barra de escala mide 1 µm. Adaptada de la Figura 2 de *Tam J, Cordier GA, Borbely JS, Sandoval Álvarez A, Lakadamyali M* (2014), "Cross-Talk-Free Multi-Color STORM Imaging Using a Single Fluorophore", PLoS ONE **9**(7): e101772, https://doi.org/10.1371/journal.pone.0101772, bajo licencia de dominio público.

6
Bibliografía

[1] Peter Atkins and Julio de Paula. *Physical Chemistry for the Life Sciences*. W. H. Freeman, January 2011.

[2] John Bekkers. *Resistivity, Axial*, pages 2617–2619. Springer New York, New York, NY, 2015.

[3] H C Bennet-Clark and E C A Lucey. The jump of the flea: a study of the energetics and a model of the mechanism. *Journal of Experimental Biology*, 47:18, 1967.

[4] D.C. Giancoli. *Física: Principios con aplicaciones*. Prentice Hall Hispanoamérica, México, 1997.

[5] Celia F. Guerra, F. Matthias Bickelhaupt, J. G. Snijders, and E. Jan Baerends. Hydrogen bonding in DNA base pairs: Reconciliation of theory and experiment. *Journal of the American Chemical Society*, 122(17):4117–4128, 2000.

[6] David L. Hu and John W. M. Bush. Meniscus-climbing insects. *Nature*, 437(7059):733–736, September 2005.

[7] John B. Hursh. Conduction velocity and diameter of nerve fibers. *American Journal of Physiology*, 127(1):131–139, 1939.

[8] D. Jou, J.E. Llebot, and C. Pérez García. *Física para ciencias de la vida*. Mc Graw-Hill interamericana de España, Madrid, 1994.

[9] K. Bogdanov. *El físico visita al biólogo*. MIR, Moscú, 1989.

[10] J.W. Kane and M.M. Sternheim. *Physics*. Wiley, 1988.

[11] M. Kleiber. Body size and metabolism. *Hilgardia*, 6(11):315–353, January 1932.

[12] Johnny Tam, Guillaume Alan Cordier, Joseph Steven Borbely, Ángel Sandoval Álvarez, and Melike Lakadamyali. Cross-talk-free multi-color storm imaging using a single fluorophore. *PLOS ONE*, 9(7):e101772, 2014.

[13] J. C. Weaver and K. H. Schoenbach. Biodielectrics. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 10(5):715–716, October 2003. Conference Name: IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.

[14] C. R. White and R. S. Seymour. Mammalian basal metabolic rate is proportional to body mass 2/3. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(7):4046–4049, April 2003.

[15] Mark Waldo Zemansky and Richard H. Dittman. *Calor y termodinámica*. McGraw-Hill, 1984.