Cálculo de incertidumbres y forma de expresar los resultados de las prácticas

ESTIMACIÓN DE ERRORES SIMPLIFICADA

Una parte importante del proceso de medida es la estimación del error que contiene el resultado que hemos obtenido.

Error absoluto: Δx

Es una estimación de la diferencia entre el valor medido y valor verdadero. Es decir, si nuestra medida nos da **x**, esperamos que el valor verdadero este dentro del intervalo:

$\mathbf{x \pm \Delta x}$

Presentación de resultados

El error absoluto **Δx** se expresa con **una sola cifra significativa** (redondeando a la más cercana), y luego redondearemos el resultado **x** para que tenga los **mismos decimales que el error** (redondeando las cifras a la más cercana). Si se utilizan potencias de diez, error y valor deben tener la **misma potencia**. También error y valor tienen que tener las **mismas unidades**.

Ejemplo:

Estamos calculando *m*. Obtenemos 39.678 gramos y para su error 0.0245 gramos.
Primero reducimos el error a una cifra significativa: $\Delta m = 0.02$ gramos
Luego redondeamos el resultado para que tenga los mismos decimales: m = 39.68 gramos (ya que es más próximo que 39.67).
Finalmente expresamos el **resultado junto con su error y sus unidades** (es como deben expresarse los resultados):
m = (39.67 ± 0.02) gramos

o bien: **m = (0.03967 ± 0.00002) kg = (3.967 ± 0.002) 10^{-2} kg**

Error relativo: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x}$

Es una estimación del porcentaje de error de la medida. Nos será útil para interpretar si el error del resultado es grande o pequeño.

ESTIMACIÓN DE ERRORES DE MEDIDAS DIRECTAS

En las medidas directas podemos tener fundamentalmente dos fuentes de error que se diferencian por sus causas:

- los debidos a las limitaciones de **precisión** del aparato de medida:
  Δx = mínima diferencia que podemos apreciar con el aparato de medida.
- los debidos a fluctuaciones aleatorias. Cuando estos errores dominan obtenemos diferentes resultados al medir varias veces lo mismo. En ese caso tendremos que hacer un tratamiento estadístico de los resultados. (El mejor valor para x será el promedio de los valores obtenidos, y el error se estima con la desviación típica.)

ESTIMACIÓN DE ERRORES DE MEDIDAS INDIRECTAS

Algunas magnitudes no las hallamos directamente sino a partir de otras. Las siguientes reglas nos dan como estimar sus errores. Supongamos una medida indirecta Y que se obtiene a partir de dos medidas directas X_1 y X_2 mediante la expresión matemática

$$Y = f(X_1, X_2),$$

donde f es una función de dos variables. La incertidumbre de Y viene dada por:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1}\Delta X_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2}\Delta X_2\right)^2}$$

donde ΔX_1 y ΔX_2 son las incertidumbres totales de las medidas directas.

$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1}$ se denomina derivada parcial de f respecto a X_1, y representa el resultado de derivar $f(X_1, X_2)$ considerando X_1 como variable y X_2 como constante.

Análogamente, $\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2}$ es la derivada parcial de f respecto a X_2 (derivaremos considerando X_2 como variable y X_1 como constante).

Casos particulares sencillos:

Cambio de escala:	$Y=cX$	$\Rightarrow$	$\Delta Y = \lvert c\rvert \Delta X$
Potencias:	$Y = cX^k$	$\Rightarrow$	$\Delta Y = \left\lvert\frac{kY}{X}\right\rvert \Delta X$
Suma:	$Y=X_1+X_2$	$\Rightarrow$	$\Delta Y = \sqrt{\Delta X_1^{\,2} + \Delta X_2^{\,2}}$
Diferencia:	$Y=X_1-X_2$	$\Rightarrow$	$\Delta Y = \sqrt{\Delta X_1^{\,2} + \Delta X_2^{\,2}}$
Producto:	$Y=X_1X_2$	$\Rightarrow$	$\Delta Y = \lvert Y\rvert \sqrt{\left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2}$
Cociente:	$Y = \frac{X_1}{X_2}$	$\Rightarrow$	$\Delta Y = \lvert Y\rvert \sqrt{\left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2}$

EJEMPLOS

Error de una suma (o resta) de dos magnitudes

Si z está dado por la expresión **z = x – y**, el error de z está dado por

$$\Delta z^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Expresaremos el resultado en la forma

$$z \pm \Delta z\ .$$

<u>Ejemplo</u>: x = (35,2 ± 0,2) g y = (30,25± 0,09) g

Hallamos z:

z = 35,2 – 30,25 = 4,95 g

Hallamos su error:

$\Delta z^2 = 0{,}2^2 + 0{,}09^2 = 0{,}0481\ g^2$

$\Delta z = (0{,}0481\ g^2)^{½} = 0{,}2193\ g$

Reducimos el error a una sola cifra significativa (redondeando):

$\Delta z = 0{,}2\ g$

Redondeamos el resultado para que tenga los mismos decimales que el error:

z = 5,0 g

Expresamos el resultado en su forma final (con sus unidades y su error):

z = (5,0 ± 0,2) g

Error del producto (o cociente) de dos magnitudes

Es la suma de los errores relativos. Si r está dado por la expresión **r = s / t** el error de r está dado por

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2,$$

de donde $\Delta r = |r|\sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}\ .$

Expresaremos el resultado en la forma:

$$r \pm \Delta r$$

<u>Ejemplo</u>: ρ = m / V

m = (5,3 ± 0,2) g V = (0,33 ± 0,02) l

Hallamos ρ:

ρ = 5,3 / 0,33 = 16,06 g/l

Hallamos su error:

$$\Delta\rho = \rho\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} = 16{,}06\sqrt{\left(\frac{0{,}2}{5{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}02}{0{,}33}\right)^2} =$$

$$= 16.06 \text{ x } \sqrt{0.001424 + 0.003673} = 16.06 \text{ x } 0.07139 = 1.147 \text{ g/l}$$

Reducimos el error a una sola cifra significativa (redondeando):

Δρ = 1 g/l

Redondeamos el resultado para que tenga los mismos decimales que el error:

ρ = 16 g/l

Expresamos el resultado en su forma final (con sus unidades y su error):

ρ = (16 ± 1) g/l

REGRESIÓN LINEAL

Si tenemos dos magnitudes x e y que tienen una relación del tipo:

y = a x + b (ecuación de la recta)

una buena forma de hallar a y b es tomar varios pares de puntos experimentales (x_i, y_i) y después hallar los valores de a y b que hacen que la recta pase más cerca de los puntos obtenidos[1].

Si llamamos *N* al número de pares de valores que hemos tomado, se puede demostrar que los valores de a y b que hacen que la recta pase más cerca son

$$\boldsymbol{a = \frac{E}{D}} \qquad \boldsymbol{b = \overline{y} - a\overline{x}},$$

donde:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$E = \sum_{i=1}^{N}(x_i y_i) - N\ \overline{x}\ \overline{y} \qquad D = \sum_{i=1}^{N}(x_i)^2 - N\left(\overline{x}\right)^2$$

Las estimaciones de los errores de a y b están dadas por:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{1}{(N-2)D}\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{1}{(N-2)D}\left(\frac{D}{N} + \left(\overline{x}\right)^2\right)\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2}$$

donde $d_i = y_i - ax_i - b$.

En Excel, la regresión lineal se puede hacer utilizando la función ESTIMACION.LINEAL, que proporciona el valor de *a* y *b*, así como sus incertidumbres.

Nota: $\sum_{i=1}^{N}$ es el sumatorio (= suma) desde 1 hasta N.

Veamos varios ejemplos para el caso N=5:

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = y_1 + y_2 + \ldots + y_5$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$$

---

[1] Lo que se hace es minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos (x_i, y_i) a la recta, es decir, minimizar $\sum_i^N (y_i - a\,x_i - b)^2$.