1. Números naturales, enteros, racionales y reales

1.1. Naturales, enteros y racionales

Los números que básicamente vamos a tratar son los reales $\mathbf{R}$. Estudiaremos sucesiones de números reales, funciones de variables reales,... Pero antes de definir los reales vamos a hacer un breve repaso de los números más sencillos. En lo que sigue se supondrá que son conocidos los significados de los símbolos $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe), $\Rightarrow$ (implica), $\Leftrightarrow$ (si y sólo si), ... y que se han visto propiedades lógicas sencillas que se utilizarán en alguna demostración como, por ejemplo, que la afirmación '$p \Rightarrow q$' equivale a '$(\text{no}\, q) \Rightarrow (\text{no}\, p)'$. Otros conocimientos que se presuponen son las ideas y símbolos básicos de la teoría de conjuntos: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección), $\subset$ (contenido en), $\in$ (pertenece), ...

Llamaremos $\mathbf{N} = \{1,2,3,4,...\}$ al conjunto de los números **naturales** (sin incluir el 0), $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ al de los **enteros**, y $\mathbf{Q} = \{p/q, p \text{ y } q \text{ enteros}, q \neq 0\}$ al conjunto de los **racionales**. La suma y el producto de dos números naturales cualesquiera son también naturales, pero su diferencia puede no serlo. Sí es un entero la diferencia de dos enteros. El cociente de racionales es racional, pero no lo es, en general, el de dos enteros. Los tres conjuntos son conjuntos ordenados por la relación "$>$"(ser mayor que). Con palabras más matemáticas, y refiriéndonos al mayor de los tres conjuntos, se dice que $\mathbf{Q}$ es un **cuerpo ordenado**, es decir, que satisface las siguientes propiedades ($a, b, c \in \mathbf{Q}$):

Propiedades de cuerpo: Existen dos operaciones "$+$" y "$\cdot$" que cumplen:
1) $+$ y $\cdot$ son asociativas y conmutativas:
$$a+(b+c) = (a+b)+c \ , \ a+b = b+a \ , \ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \ , \ a\cdot b = b\cdot a$$
2) se cumple la propiedad distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
3) existen elementos neutros 0 respecto a $+$ y 1 respecto a $\cdot$: $a+0=a$, $a\cdot 1 = a \ \forall a$
4) existen elementos inversos respecto a $+$ y $\cdot$:
$$\forall a \ \exists -a \text{ tal que } a+(-a)=0 \ , \ \forall a \neq 0 \ \exists\, a^{-1} \text{ tal que } a\cdot a^{-1} = 1$$

Propiedades de orden: Existe una relación "$>$"que satisface:
5) dado a , o bien $a>0$, o bien $-a>0$, o bien $a=0$
6) si $a, b>0$ también $a+b>0$, $a\cdot b>0$

A partir únicamente de las propiedades anteriores se pueden definir las otras conocidas operaciones básicas (diferencia, cociente y potencias) y desigualdades:
$$a-b = a+(-b); \quad \text{si } b\neq 0,\ a/b = a\cdot b^{-1}; \quad \text{si } n\in\mathbf{N},\ a^n = a\cdot\ldots\cdot a \ ,\ n \text{ veces};$$
$$b>a \text{ si } b-a>0 \ ; \ b<a \text{ si } a>b \ ; \ b\geq a \text{ si } b>a \text{ ó si } b=a \ ; \ b\leq a \text{ si } a\geq b \ .$$

$\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$ no son un cuerpo: $\mathbf{N}$ no posee inverso siquiera respecto de la suma y $\mathbf{Z}$ no lo tiene respecto del producto. El conjunto $\mathbf{R}$ de los reales que trataremos en la próxima sección poseerá todas estas propiedades y además otra (el llamado 'axioma del extremo superior').

Observemos que entre dos racionales $p>q$, por cercanos que estén, existen infinitos racionales. En efecto, $r_1 = (q+p)/2$ es otro racional que se halla entre los dos. Otros infinitos, por ejemplo, son $r_2 = (q+r_1)/2$, $r_3 = (q+r_2)/2$, ... Recordamos que una forma de precisar de forma única un racional es dar su expresión decimal, que o bien tiene sólo un número finito de decimales o bien tiene además un número finito de decimales que se repiten periódicamente (7/8=0.875 es un ejemplo de la primera situación y 8/7=1.142857142857... lo es de la segunda). Pensando en la expresión decimal vuelve a estar muy claro que entre dos racionales existen otros infinitos y que podemos encontrar racionales tan próximos como queramos a uno dado.

Repasemos algunas otras definiciones y propiedades de los naturales, enteros y racionales:

Demostraciones por inducción.

Supongamos que queremos demostrar una afirmación, que llamaremos $P(n)$, que depende de un número natural n . Demostrar $P(n)$ por inducción consiste en:

i) demostrar $P(1)$ (es decir, que la afirmación es cierta si $n=1$)
ii) demostrar que $P(n) \Rightarrow P(n{+}1)\ \forall n$ (supuesta cierta para n se demuestra para $n{+}1$)

Hecho esto, como $P(1)$ es cierta, por ii) también lo es $P(2)$. Y por tanto $P(3)$. Y $P(4)$ ...

Ej. Probemos por inducción que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

[recordemos que el primer símbolo se lee 'sumatorio de k desde 1 hasta n']

$P(1)$ es cierta: $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Probemos ahora $P(n+1)$ suponiendo cierta $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = [\text{estamos suponiendo cierta } P(n)] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Dados dos naturales n y d se dice que n es **múltiplo** de d (o que d es **divisor** de n) si n/d es también un número natural. Desde luego, todo n tiene al menos dos divisores: el 1 y el propio n. Si estos son sus únicos divisores dice que n es **primo**. Un conjunto de enteros $n_1, ..., n_k$ admite siempre un divisor común a todos: el 1. Se llama **máximo común divisor** al mayor natural que divide a todos ellos (y lo denotaremos por $\mathrm{mcd}[n_1, ..., n_k]$). Por otra parte, dados los $n_1, ..., n_k$ existen naturales que son múltiplos de todos ellos (por ejemplo el producto de todos). Se llama **mínimo común múltiplo** ($\mathrm{mcm}[n_1, ..., n_k]$) al menor número con esta propiedad.

Hallar el mcd y el mcm de una colección de naturales es fácil una vez calculados todos los divisores primos de cada uno, lo que puede ser muy largo si los números son muy gordos.

[Para hallar estos divisores conviene conocer las reglas de divisibilidad por números sencillos: recordamos que un entero es divisible por 3 (y por 9) si y sólo si lo es la suma de sus cifras; divisible por 4 (por 8) si lo son sus dos (tres) últimas cifras; por 5 si acaba en 0 o en 5 ; por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar es un múltiplo de 11 (incluido el 0)].

Otra forma de hallar el $\mathrm{mcd}[m,n]$ es utilizar el **algoritmo de Euclides**:

Sea $m>n$. Dividamos m entre n y llamemos q_1 al cociente y r_1 al resto: $m=q_1 n + r_1$. Dividamos ahora n entre r_1 : $n=q_2 r_1 + r_2$. A continuación r_1 entre r_2 : $r_1 = q_3 r_2 + r_3$. Luego r_2 entre r_3 ..., y proseguimos dividiendo de esta forma hasta que el resto sea 0 . El $\mathrm{mcd}[m,n]$ es entonces **el último resto no nulo**.

Calculado el mcd, se puede hallar el mcm utilizando que: $\mathrm{mcm}[m,n] = \dfrac{m\cdot n}{\mathrm{mcd}[m,n]}$.

Ej. Sean 2340 y 6798.

Como $2340 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$ y $6798 = 2\cdot 3\cdot 11\cdot 103$, mcd=6 y mcm=$2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 103 = 2651220$

Euclides: $6798 = 2\cdot 2340 + 2118, 2340 = 1\cdot 2118 + 222, 2118 = 9\cdot 222 + 120, 222 = 1\cdot 120 + 102,$
$120 = 1\cdot 102 + 18, 102 = 5\cdot 18 + 12, 18 = 1\cdot 12 + 6, 12 = 2\cdot 6 \Rightarrow \mathrm{mcd} = 6,\ \mathrm{mcm} = \frac{2340\cdot 6798}{6} = 2651220$

[Para hallar el $\mathrm{mcd}[n_1, ..., n_k]$ se puede calcular m_1=$\mathrm{mcd}[n_1, n_2]$, luego m_2=$\mathrm{mcd}[m_1, n_3]$, ...]

Factoriales, números combinatorios y binomio de Newton

Dado un $n \in \mathbf{N}$ se define **factorial** de n como: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, y además $0! = 1$, y si k es otro natural con $0 \le k \le n$, el **coeficiente binomial** o **número combinatorio** es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

[$\binom{n}{k}$ se lee 'n sobre k'; obsérvese que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ y que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $n!$ representa el número de formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de n elementos y el número combinatorio (que siempre es un número natural) es el número de formas distintas en que se pueden escoger grupos distintos de k elementos (sin importar su orden) entre los n de un conjunto].

La fórmula más famosa en que aparecen estos números es la de **binomio de Newton**:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Demostrémosla por inducción. Es claramente cierta para $n=1$: $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1$.
Suponiendo que es cierta para n , probémosla ahora para $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[a^n + \cdots + \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1} + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n\right]$$

$$= a^{n+1} + \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right] a^n b + \cdots + \left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}b^k + \cdots + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k,$$

puesto que se cumple: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = n!\frac{(n-k+1)+k}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$.

Ej. $(1+x)^6 = 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$, ya que $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 3\cdot5 = \binom{6}{4}$, $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 5\cdot4$

Existen infinitos números irracionales.

Vimos que entre dos racionales existían otros infinitos y que existían racionales tan cerca como quisiésemos de uno dado. Sin embargo, a pesar de estar tan juntos, aparecen de forma natural (ya desde los griegos) otros números que no son racionales (es decir, **irracionales**; su expresión decimal tendrá infinitos decimales no repetidos periódicamente). Por ejemplo, el teorema de Pitágoras asegura que la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ unidades de longitud. Es fácil probar que $\sqrt{2}$ no es racional (demostrar que otros números famosos como π ó e son irracionales es bastante más complicado). Para hacerlo, vamos a suponer que lo es y llegaremos a una contradicción (es lo que se llama demostración por reducción al absurdo).

Como se sabe, un racional puede ser expresado de infinitas maneras diferentes como fracción p/q. De ellas, se llama irreducible a la que tiene el denominador más pequeño posible, o sea, aquella con p y q sin divisores comunes. Supongamos que $\sqrt{2} = p/q$ fracción irreducible. Entonces $p^2 = 2q^2$. Así p^2 es par, con lo que también debe serlo p (los cuadrados de pares son pares e impares los de los impares) y por tanto es de la forma $p = 2m$. Así pues, $2m^2 = q^2$ y q también es par, en contradicción con la suposición de que p/q fuese irreducible.

Observemos que la suma $z = p + x$ con p racional y x irracional es necesariamente otro número irracional (si fuese z racional, sería $x = z - p$ también racional). Y lo mismo sucede, si el racional $p \neq 0$, con su producto (se prueba casi igual; que conste que suma y producto de irracionales puede ser racional, por ejemplo, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ y $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$). Conocemos ya, pues, infinitos irracionales: todos los de la forma $p + q\sqrt{2}$, con $p, q \in \mathbf{Z}$. Con esto podemos ya ver que también entre dos racionales cualesquiera, por muy próximos que estén entre sí, existen infinitos irracionales (por ejemplo, si $p > q$ son racionales, $q + (p-q)\sqrt{2}/n$, con $n = 2, 3, ...$, son infinitos irracionales y es fácil ver que están entre uno y otro). También entre dos irracionales hay infinitos racionales e irracionales (parece bastante claro con la expresión decimal). O entre un racional y un irracional.

1.2. El conjunto **R**

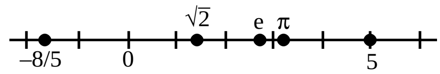
¿Qué son exactamente los números reales? Sabemos que 5, –8/5, $\sqrt{2}$, π, e,... lo son, que los tres últimos no son racionales y no se pueden expresar sin utilizar infinitos decimales, que no se pueden escribir como una fracción. Se saben resolver algunas ecuaciones con coeficientes reales, trabajar con desigualdades... Se podría trabajar sólo con esta idea intuitiva, pero en matemáticas a veces la intuición engaña. Convendría tener una definición rigurosa del **conjunto R de los números reales**. Lo mas serio (pero muy largo) sería construir los reales a partir de los racionales. Para ahorrar tiempo, definiremos **R** como un conjunto de objetos básicos que satisfacen unas propiedades dadas que tomaremos como axiomas (si se construyese **R** estas propiedades serían teoremas que habría que demostrar). De ellas se podrían deducir el resto de propiedades que nos permiten hacer cálculos con reales (tampoco lo haremos (seguiría siendo demasiado largo), pero es interesante leer el Spivak para ver como se hace). Así pues, definimos a partir de las propiedades vistas para **Q**:

Axiomas del conjunto R

R es un conjunto que posee las propiedades 1) , ... , 6) de **cuerpo ordenado** y además satisface el **axioma del extremo superior**

El último axioma (que vemos algo más adelante, pues exige alguna definición) distingue **R** de **Q**.

Gracias al orden que hay en **R** tiene sentido la representación usual de **R** como una línea recta, asociando a cada número real un punto de la recta. Es tan común que se utilizan indistintamente los términos 'conjunto de números reales' y 'recta real'; 'número real' y 'punto'.



A partir exclusivamente de los axiomas se podrían demostrar todo el resto de propiedades de los números reales que se habrán utilizado en cursos anteriores. Repasamos sin demostrarlas algunas referentes a desigualdades, porque suele haber problemas en el trabajo con ellas:

Teorema:

$a<b \Rightarrow a+c<b+c$, $a-c<b-c$	$a<b$, $c<d \Rightarrow a+c<b+d$, $a-d<b-c$
$a<b$, $c>0 \Rightarrow ac<bc$, $a/c<b/c$	$a<b$, $c<d \Rightarrow ac<bd$, si $a,b,c,d>0$
$a<b$, $c<0 \Rightarrow ac>bc$, $a/c>b/c$	$a/c<b/d \Leftrightarrow ad<bc$, si $a,b,c,d>0$
$1<a \Rightarrow a<a^2$; $0<a<1 \Rightarrow a>a^2$	$a<b \Leftrightarrow 1/a>1/b, a^2<b^2, \sqrt{a}<\sqrt{b}$, si $a,b>0$

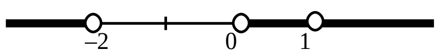
Todas las desigualdades son válidas sustituyendo los $<$ por $\leq$ (menos los >0 ó <0).

[A lo largo del curso (y como siempre se hace) $\sqrt{a}$ representará siempre sólo la **raíz positiva** del número $a\geq 0$; el otro número real cuyo cuadrado es ese número a se debe representar por $-\sqrt{a}$]

Ej. Determinemos todos los reales x que satisfacen: $\boxed{x^2+\frac{2}{x}>3}$

Si $x=0$, el cociente no está definido. Si $x\neq 0$, como es lícito sumar o restar a ambos lados, la desigualdad equivale a: $x^2+\frac{2}{x}-3=\frac{x^3-3x+2}{x}>0$. Este cociente será positivo si y sólo tienen el mismo signo su denominador y su numerador. Para conocer el signo de éste necesitamos hallar sus raíces. Aunque esto es complicado en general, es fácil ver aquí que $x=1$ lo anula, con lo que, dividiendo por $(x-1)$ tenemos que $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$. Como el numerador es estrictamente positivo si $x>-2$ y $x\neq 1$ y negativo si $x<-2$, los x buscados son:

$\{x : x<-2 \text{ ó } 0<x<1 \text{ ó } x>1\}$

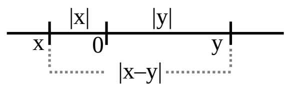


Podríamos haber operado de otra forma, multiplicando ambos miembros por x, pero teniendo siempre cuidado con que al multiplicar por números negativos las desigualdades se invierten.

Si $x>0$, la desigualdad equivale a $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)>0 \to$ todo $x>0$ con $x\neq 1$.
Si $x<0$, cambia la desigualdad: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)<0 \to$ todo $x<-2$.

A cada real x le podemos asociar un real positivo $|x|$, **valor absoluto** de x, definido por:

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$



$|x|$ representa la distancia de x al origen y $|x-y|$ la distancia de x a y (tanto si $y > x$ como si $x > y$)

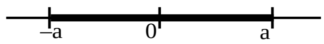
Propiedades inmediatas a partir de la definición son:

$$\boxed{|x|^2 = x^2 \ , \ |x| = |-x| \ , \ |xy| = |x||y| \ , \ -|x| \leq x \leq |x|}$$

Probemos otras que utilizaremos en muchas ocasiones:

Teorema: $\boxed{\text{Sea } a > 0 : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \ ; \ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a}$

$\Rightarrow$) si $|x| \leq a \Rightarrow -|x| \geq -a \Rightarrow -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$



$\Leftarrow$) sea $-a \leq x \leq a$; si $x \geq 0, |x| = x \leq a$; si $x \leq 0, |x| = -x \leq a$; por tanto, $\forall x, |x| \leq a$

[con el $<$ se demostraría igual; del teorema se deduce, desde luego, que
$|x| \geq a \Leftrightarrow \ x \leq -a$ ó $a \leq x$, puesto que la afirmación '$p \Leftrightarrow q$' equivale a la '(no p) $\Leftrightarrow$ (no q)']

Teorema: $\boxed{\begin{array}{l} |\,x+y\,| \leq |x| + |y| \ \ (\textbf{desigualdad triangular}) \ ; \\ |x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y| \ ; \ \ |\,|x| - |y|\,| \leq |x-y| \end{array}}$

$(|x+y|)^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$; $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$

$|x| - |y| \leq |x-y|$; $|y| - |x| \leq |x-y| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|x-y| \Rightarrow |\,|x| - |y|\,| \leq |x-y|$

Ej. Determinemos los x que satisfacen: $\boxed{|\sqrt{x} - 2| = x}$

Si $x < 0$, la raíz no está definida. Desarrollando (para $x \geq 0$) el valor absoluto tenemos:

$$|\sqrt{x} - 2| = \begin{cases} \sqrt{x} - 2 & \text{si } \sqrt{x} \geq 2, \text{ es decir, si } x \geq 4 \\ 2 - \sqrt{x} & \text{si } \sqrt{x} \leq 2, \text{ es decir, si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

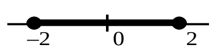
$$\text{Y, por tanto, } |\sqrt{x} - 2| = x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x + 2 & \text{si } x \geq 4 \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = 0 \\ \sqrt{x} = 2 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases}$$

El primer polinomio de segundo grado no se anula para ningún x real. El segundo para $x = 1$ y para $x = 4$ (ambos en la región $0 \leq x \leq 4$ en que estamos). Pero sólo es válido $x = 1$ ($|1-2| = 1$). El otro real $x = 4$ no cumple la igualdad: $|2-2| \neq 4$ (nos lo hemos inventado al elevar al cuadrado).

Ej. Hallemos los x que cumplen: $\boxed{|x^2 - 1| \leq 3} \Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 \leq 4$.

Ambas desigualdades se cumplen si y sólo si $|x| \leq 2$ ($\Leftrightarrow x^2 \leq 4$; la primera es cierta $\forall x$).
Podemos llegar a lo mismo discutiendo las posibilidades del valor absoluto (más largo):

$$3 \geq |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 & \text{si } |x| \geq 1 \to 1 \leq |x| \leq 2 \\ x^2 \geq -2 & \text{si } |x| \leq 1 \to \text{todo } |x| \leq 1 \end{cases}$$



Ej. Probemos ahora que para todo x se cumple $\boxed{-8 \leq |x-5| - |x+3| \leq 8}$.

Los teoremas aseguran: $|x| - 5 \leq |x-5| \leq |x| + 5$, $|x| - 3 \leq |x+3| \leq |x| + 3$. Por tanto:

$|x-5| - |x+3| \leq |x| + 5 - [|x| - 3] = 8$ (mayor–menor) y

$|x-5| - |x+3| \geq |x| - 5 - [|x| + 3] = -8$ (menor–mayor)

También lo podríamos haber hecho expresando los valores absolutos según los valores de x .

Para enunciar el axioma del extremo superior necesitamos unas definiciones previas:

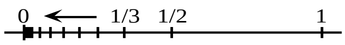
Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice **acotado superiormente** (**inferiormente**) si existe $k \in \mathbf{R}$ tal que $a \leq k$ ($a \geq k$) para todo $a \in A$. A un real k con esa propiedad se le llama **cota superior** (**inferior**) de A. A se dice **acotado** si lo está superior e inferiormente ($\Leftrightarrow \exists k$ tal que $|a| \leq k$, $\forall a \in A$).

Ej. $\mathbf{R}_+ = \{x : x \geq 0\}$ no es acotado, aunque sí lo está inferiormente (por $-\pi$, por el propio 0 ...).

$A = \{x : 0 \leq x < 7\}$ 

está acotado

[cotas superiores: $\sqrt{93}$, 7 (la menor), ...; cotas inferiores: -13, 0 (la mayor), ...].

$B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ 

también lo está

[cotas superiores: π , 1 (la menor), ...; cotas inferiores: -3, 0 (la mayor), ...].

Extremo superior (o supremo) de A es la menor de sus cotas superiores. Matemáticamente:

$s \in \mathbf{R}$ es el **extremo superior** o **supremo** de A [$\sup A$] si:
i) s es cota superior de A , ii) si k es cota superior de A entonces $s \leq k$

[se define análogo extremo inferior o ínfimo de A [$\inf A$], mayor de las cotas inferiores]

El $\sup A$ puede pertenecer o no a A; si pertenece se le llama máximo, es decir:

$M \in \mathbf{R}$ es el **máximo** de A [$\max A$] si $M \in A$ y $a \leq M$, $\forall a \in A$ (análogamente, $\min A$)

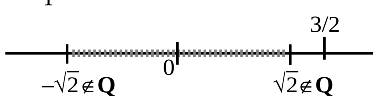
Ej. $\mathbf{Z}$, sin cotas superiores ni inferiores, no puede tener ni supremo ni ínfimo. 7 es el supremo del A de antes (es cota superior y no las hay más pequeñas), pero no es máximo, pues $7 \notin A$; 0 es su mínimo (y, por tanto, su ínfimo). Para B , 1 es el máximo (y supremo) y 0 el ínfimo (no mínimo).

Axioma del extremo superior:

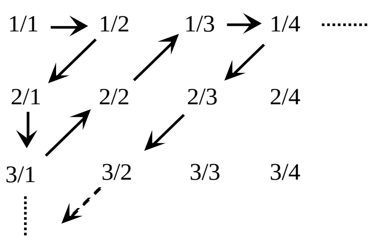
Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee extremo superior

[no es difícil demostrar que la afirmación: 'todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee extremo inferior' es equivalente al axioma]

Este axioma precisa la idea intuitiva de que los números reales "llenan del todo" la recta real. Como ocurría en $\mathbf{Q}$, entre todo par de reales distintos existen infinitos reales (infinitos racionales e infinitos irracionales). Pero a pesar de estar también los elementos de $\mathbf{Q}$ 'tan cerca unos de otro como queramos', dejan sin embargo "huecos" entre ellos (los puntos ocupados por los infinitos irracionales). Por eso hay conjuntos acotados en $\mathbf{Q}$ sin supremo. Por ejemplo, $\{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}$ es un subconjunto de $\mathbf{Q}$ con cotas superiores racionales ($3/2$, por ejemplo) pero no existe ninguna en $\mathbf{Q}$ que sea la más pequeña. Dada cualquier cota racional siempre puedo encontrar otra menor (más cercana al irracional $\sqrt{2}$). El mismo conjunto, visto como subconjunto de $\mathbf{R}$ debe tener supremo: $\sqrt{2}$ lo es.



Aunque hay infinitos racionales e infinitos irracionales el número de irracionales es un infinito "más gordo" que el de los racionales (dos conjuntos, finitos o infinitos, tienen el mismo número de elementos si se puede hacer una biyección entre ellos). El número de racionales es el mismo que el de enteros (o el de naturales, que también es el mismo), ya que se puede hacer corresponder a cada entero un racional y viceversa (matemáticamente se dice que $\mathbf{Q}$ es numerable) como sugiere el esquema de la izquierda. Los irracionales (y por tanto los reales), sin embargo, no se pueden poner en biyección con $\mathbf{N}$ (pero esto es algo más difícil probarlo).



Los siguientes subconjuntos de **R** nos van a aparecer un montón de veces en el curso:

Intervalos. Dados $a<b$ se define:

$$\boxed{\text{intervalo abierto } (a,b)=\{x: a<x<b\}\ ;\ \text{intervalo cerrado } [a,b]=\{x: a\le x\le b\}}$$

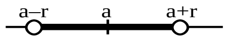
a y b no pertenecen 

a y b sí pertenecen 

$$\boxed{\begin{array}{l}[a,b)=\{x: a\le x<b\}\ ;\ (a,\infty)=\{x: a<x\}\ ;\ (-\infty,b)=\{x: x<b\}\\ (a,b]=\{x: a<x\le b\}\ ;\ [a,\infty)=\{x: a\le x\}\ ;\ (-\infty,b]=\{x: x\ge b\}\end{array}}$$

[∞ no es ningún número real, es sólo notación]

Se llama $\boxed{\textbf{entorno} \text{ de centro } a \text{ y radio } r>0 \text{ a } B(a,r)=\{x: |x-a|<r\}=(a-r,a+r)}$

[es decir, al intervalo abierto de longitud $2r$ centrado en a : 

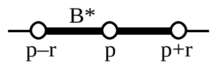
]

Los intervalos abiertos y cerrados son casos particulares de un tipo de conjuntos importantes en matemáticas más avanzadas: los conjuntos abiertos y cerrados que vamos a definir:

Def. Sea $A\subset \mathbf{R}$ y $a\in A$. a es punto **interior** a A si existe $r>0$ tal que $B(a,r)\subset A$. A es **abierto** si todos sus puntos son interiores.

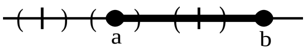
Def. Sea $A\subset \mathbf{R}$. p es **punto de acumulación** de A si en todo entorno de p existen puntos de A distintos de p . [p no tiene que estar en A]

Es decir, si llamamos $B^*(p,r)=B(p,r)-\{r\}=\{x: 0<|x-p|<r\}$, p es de acumulación de A si para todo $r>0$ es $A\cap B^*(p,r)\neq\phi$.

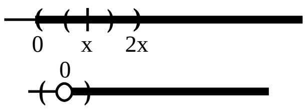


Def. A es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación

Ej. $[a,b]$ no es abierto porque no todos sus puntos son interiores; hay dos de ellos que no lo son: a y b (los demás sí lo son); por muy pequeño que sea r, $B(a,r)\not\subset [a,b]$ (hay puntos de $B(a,r)$, los de la izquierda de a, que no son de $[a,b]$).

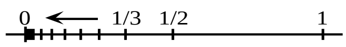


Para ver si es cerrado, localicemos sus puntos de acumulación: cualquier $p\notin[a,b]$ no lo es, ya que un entorno suyo suficientemente pequeño no contiene ningún punto del intervalo; todo $p\in[a,b]$ (incluidos a y b) es de acumulación pues cualquier entorno suyo contiene infinitos puntos de $[a,b]$. Como $[a,b]$ contiene a todos sus puntos de acumulación, es cerrado.

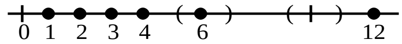


$(0,\infty)$ sí es abierto, pues todos sus puntos son interiores. En efecto, sea $x\in(0,\infty)$. $\exists r=x$ (o cualquier $r<x$) tal que $B(x,r)=(0,2x)\subset(0,\infty)$. $(0,\infty)$ no es cerrado, pues $0\notin(0,\infty)$ y es de acumulación del conjunto.

$\{1/n: n\in\mathbf{N}\}$ tiene un único punto de acumulación (el 0) que no pertenece al conjunto: no es cerrado. Tampoco es abierto, pues tiene puntos no interiores (ninguno lo es).



$\{n\in\mathbf{N}: n \text{ es divisor de } 12\}=\{1,2,3,4,6,12\}$ es claro que tampoco es abierto (puntos no interiores), pero este conjunto sí es cerrado, pues contiene a todos sus puntos de acumulación (al conjunto ϕ (no hay ninguno)).



Teorema: $\boxed{A \text{ es cerrado si y solo si su complementario } \mathbf{R}-A \text{ es abierto}}$

Sea A cerrado: tomemos cualquier $a\in\mathbf{R}-A\Leftrightarrow a\notin A\Rightarrow a$ no es de acumulación de A
$\Rightarrow\exists r$ tal que $B(a,r)\cap A=\phi\Rightarrow B(a,r)\subset\mathbf{R}-A\Rightarrow\mathbf{R}-A$ es abierto

Sea $\mathbf{R}-A$ abierto. Probemos que A es cerrado probando: '$a\notin A\Rightarrow a$ no es de ac. de A':
$a\notin A\Rightarrow a\in\mathbf{R}-A$ abierto $\Rightarrow\exists r/B(a,r)\subset\mathbf{R}-A\Rightarrow B(a,r)\cap A=\phi\Rightarrow a$ no es de ac.