2. Funciones, sucesiones, límites y continuidad en $\mathbf{R}$

2.1. Funciones reales de variable real

Def. Una **función** f es una regla que asigna a cada uno de los números x de un subconjunto D de $\mathbf{R}$ un único número real $f(x)$. A $D \equiv \text{dom} f$ se le llama **dominio** de f . $y \equiv f(x)$ es el **valor** de f en x . **Imagen** o **recorrido** de f es $f(D) \equiv imf \equiv \{f(x) : x \in D\}$.

$$f : D \to f(D) \qquad x \to y \equiv f(x)$$

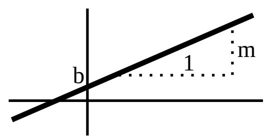
En ocasiones f admite una expresión algebraica como $f(x) = |x|$, $f(x) = \operatorname{sen} x$,...), pero en otras no será expresable ni por una serie de palabras. Una f estará determinada si conocemos todos los x de D y los valores y correspondientes. Esto lleva a una definición más teórica, aunque más precisa:

Def. Una función f es un conjunto de pares ordenados que no contiene dos distintos con el mismo primer elemento

[así, la 'función $|x|$' sería $\{(x, |x|) : x \in \mathbf{R}\}$]

(si no se precisa más, dom$f$ es el conjunto de x para los que f tiene sentido)

Geométricamente, f se puede representar con un sistema de coordenadas como un conjunto de puntos (**gráfica** de f) en el plano xy . Así, la gráfica de $f(x) = mx + b$ es un conjunto de puntos que constituyen una recta (m es su pendiente y b su corte con el eje y).



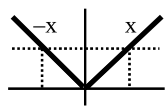
Dadas dos funciones f y g se pueden definir otras funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g y $f \circ g$:

Def. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para $x \in$dom$f \cap$dom$g$. $(f/g)(x) = f(x)g(x)$ para $x \in$dom$f \cap$dom$g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$. $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ (**composición** de f y g) para x tales que $x \in$dom$g$ y $g(x) \in$dom$f$.

Suma y producto de funciones, como es inmediato ver, son conmutativas, asociativas y hay distributiva; la composición es asociativa, pero no conmutativa:

Ej. Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ se tiene que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x + 1 \neq 2x^2 - 1 = (g \circ f)(x)$.

Def. f es **inyectiva** en $A \subset \mathbf{R}$ si $f(x) = f(x^*) \Rightarrow x = x^*$, $\forall x, x^* \in A$ [o lo que es lo mismo, si $x \neq x^* \Rightarrow f(x) \neq f(x^*)$].



Ej. $f(x) = |x|$ no es inyectiva en $A = \mathbf{R}$ (a x y $x^* = -x$ les corresponde el mismo valor). Sí lo es en $A = [0, \infty)$, o en $A = [-7, -1]$, por ejemplo.
La gráfica de una función inyectiva no corta más de una vez cualquier recta horizontal.

Def. Si $f : x \to y = f(x)$ es inyectiva existe la **función inversa** $f^{-1} : y \to x = f^{-1}(y)$.

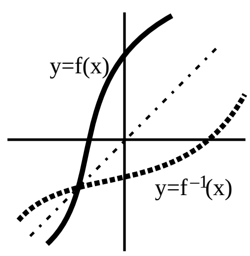
$$f^{-1} : f(A) \to A \qquad y = f(x) \to x = f^{-1}(y)$$

[si no es inyectiva, o sea, si hay $x \neq x^*$ con $f(x) = f(x^*) = y$, no podemos asignar un único x al y]

En términos de pares ordenados $f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$.

Propiedades inmediatas son:

domf^{-1}=im$f$, imf^{-1}=dom$f$, $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

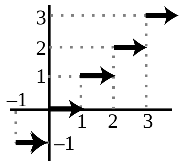


La gráfica de $f(x)$ y la de $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta $y = x$ [pues (x, y) e (y, x) lo son]. Para escribir explícitamente $y = f^{-1}(x)$ (si se puede; en general será imposible) se despeja la x en función de y de $y = f(x)$ y se cambia el nombre a las variables.

Ej. La inversa de $y = x^3 - 5$ es $y = (x+5)^{1/3}$ [pues $x = (y+5)^{1/3}$ al despejar].

Def. f es **estrictamente creciente** en $A \subset \mathbf{R}$ si $\forall x, x^* \in A$ con $x < x^*$ se tiene $f(x) < f(x^*)$. Es **estrictamente decreciente** si $f(x) > f(x^*)$. Es **creciente** si $f(x) \leq (x^*)$. Es **decreciente** si $f(x) \geq f(x^*)$. Cualquiera de ellas se dice **monótona** (**estrictamente monótonas**, las dos primeras).

Ej. $f(x) = [x] =$ máximo entero menor o igual que x [llamada 'parte entera de x'] es creciente en todo $\mathbf{R}$ [no estrictamente].



Ej. $f(x) = |x|$ es estrictamente decreciente en $\{x \leq 0\}$ y es estrictamente creciente en $\{x \geq 0\}$.

Teorema: $\boxed{f \text{ estrictamente monótona en } A \Rightarrow f \text{ inyectiva en } A}$ [y tiene función inversa]

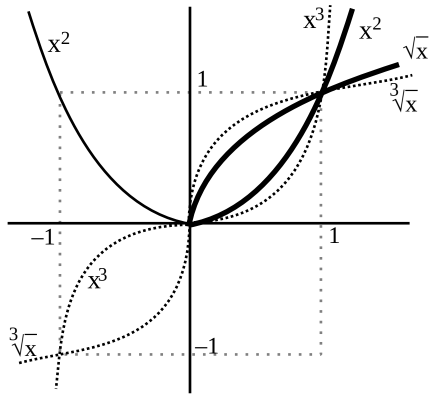
[si $x \neq x^*$ o bien es $f(x) < f(x^*)$ o bien $f(x) > f(x^*)$]

[Para ver si una función es monótona (y por tanto inyectiva) acudiremos en el futuro a las derivadas].

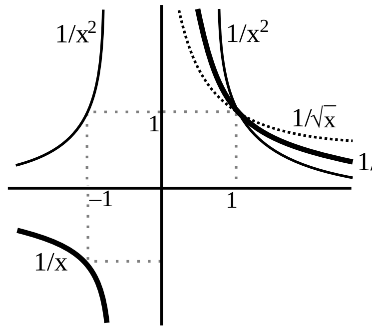
Definición y gráficas de las funciones elementales:

$$\boxed{y = x^n \ , \ y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \ , \ n \in \mathbf{N}}$$

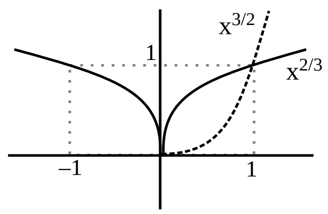
Si n impar, $y = x^n$ es inyectiva en todo $\mathbf{R}$ y $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Su inversa $x^{1/n}$ está definida en $\mathbf{R}$ y su imagen es $\mathbf{R}$. Si n par, no es inyectiva en $\mathbf{R}$. Se llama entonces $y = x^{1/n}$ a la inversa de $y = x^n$ restringida al intervalo $[0, \infty)$, con lo que la $y = x^{1/n}$ tiene por dominio e imagen $[0, \infty)$ (la función $y = -x^{1/n}$, para n par, es la inversa de $y = x^n$ restringida a $(-\infty, 0]$)



$$\boxed{\begin{array}{c} y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \\ y = x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}} \\ n \in \mathbf{N} \end{array}} \rightarrow$$



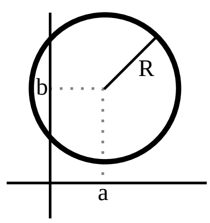
$$\boxed{y = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} \ , \ m, n \in \mathbf{N}}$$

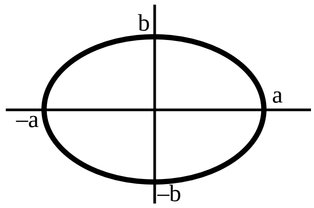


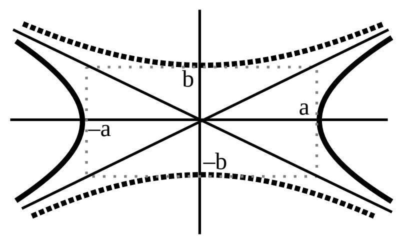
Las curvas (**cónicas**):

$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $(\bullet)$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$.

(circunferencia) (elipse) (hipérbolas)





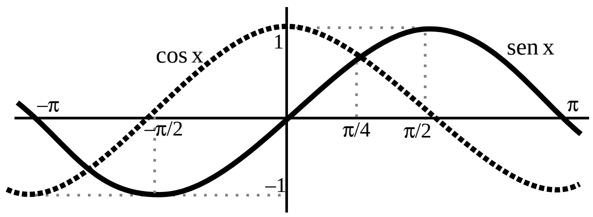


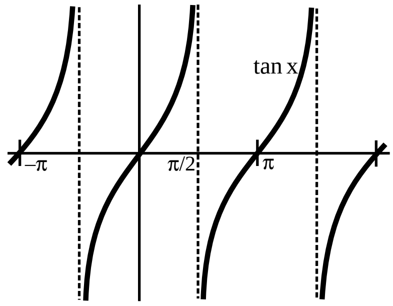
No definen una única función (por ejemplo, $(\bullet)$ define dos:

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$).

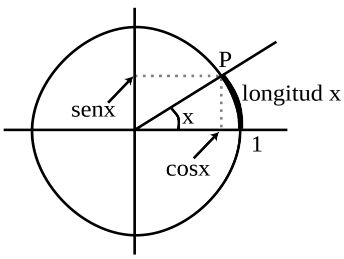
Funciones trigonométricas (siempre en **radianes**):

Unas definiciones antes: f se dice **par** si $f(-x)=f(x)$ e **impar** si $f(-x)=-f(x)$;
f es de **periodo** T o T-**periódica** si $f(x+T)=f(x)\ \forall x$.





$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son de periodo 2π, $\operatorname{sen} x$ es impar y $\cos x$ es par, $\tan x$ es π-periódica e impar.



Aceptaremos la definición clásica de $\boxed{\operatorname{sen} x}$ [dado un número x, se toma el punto P sobre la circunferencia unidad tal que x sea la longitud del arco que une $(1,0)$ con P; el ángulo orientado formado por las semirrectas que unen $(0,0)$ con ambos puntos es el ángulo de x radianes y $\operatorname{sen} x$ es la ordenada de P], a pesar de no ser nada rigurosa, por basarse en el concepto de longitud de una curva cuya definición no tenemos bien establecida.

[Se le puede dar rigor utilizando integrales, lo mismo que a $\operatorname{sen} x$: ver Spivak].

A partir del $\operatorname{sen} x$ definimos:

$$\boxed{\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)}\ ,\ \forall x\ ;\quad \boxed{\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\ ,\ \text{si } x\neq\tfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\ .$$

[Nos será más útil esta definición de $\cos x$ que la equivalente 'abscisa del punto P'].

Admitimos que sus gráficas son las de arriba y repasemos algunas de sus propiedades clásicas.

Recordemos primero la equivalencia entre grados y radianes. Como un ángulo recto son $\frac{\pi}{2}$ radianes (la longitud de la circunferencia unidad es 2π) o 90°, se tiene que $a° = \frac{a\pi}{180}$ radianes. En particular, los famosos ángulos de 30°, 45° y 60° son, respectivamente, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Las funciones trigonomtricas tienen una infinidad de valores exactos conocidos como:

$$\operatorname{sen}(k\pi)=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\tan(k\pi)=0\ ,$$
$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos(2k\pi)=1\ ,\ \operatorname{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos[(2k-1)\pi]=-1\ ,$$

que son inmediatos, y los siguientes que se deducen fácilmente del teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6}=\cos\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2}\ ,\quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}=\cos\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3}=\cos\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{3}\ ,\quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}=1\ ,\quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

(además de los similares de otros cuadrantes). Del teorema de Pitágoras también se deduce:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1\ \Rightarrow\ 1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}}$$

A partir de estas últimas igualdades es sencillo hallar, dada cualquiera de las razones trigonométricas de un ángulo y el cuadrante en el que se encuentra, los valores de las restantes:

Ej. Si $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ y $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, los valores del seno y el coseno de este ángulo son:

$$\cos\alpha=+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+(16/9)}}=\frac{3}{5}\ ,\quad \operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha\,\tan\alpha=-\frac{4}{5}\ .$$

Más difíciles de probar son las siguientes importantes identidades (válidas $\forall a, b$):

$$\boxed{\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b \ , \ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

pero a partir de ellas ya es fácil comprobar todas las siguientes (de hecho, nos bastaban las fórmulas para $a + b$, pues las de $a - b$ son consecuencia inmediata de ellas). Por ejemplo:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \ , \ \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 a = \tfrac{1}{2}\left[1 - \cos 2a\right] \ , \ \cos^2 a = \tfrac{1}{2}\left[1 + \cos 2a\right]}$$

Ej. Calculemos usando las igualdades anteriores el $\cos \frac{35\pi}{12}$.

Primero observemos que $\cos \frac{35\pi}{12} = \cos(\frac{35\pi}{12} - 2\pi) = \cos \frac{11\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12}) = -\cos \frac{\pi}{12}$.

Como $\cos^2(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}[1 + \cos \frac{\pi}{6}] = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \ \Rightarrow \ \cos \frac{35\pi}{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Podemos dar una expresión más bonita: $-\cos \frac{\pi}{12} = -\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Veamos otras propiedades que utilizaremos a lo largo del curso. Ésta es casi inmediata:

$$\boxed{\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \ \Rightarrow \ \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}}$$

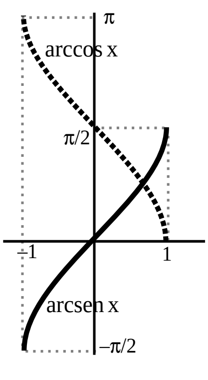
En las siguientes basta desarrollar los segundos miembros:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\ \operatorname{sen} a \cos b &= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right] \end{aligned}}$$

En la última, llamando $A = a + b$ y $B = b - a$, resulta ser $a = \frac{A-B}{2}$ y $b = \frac{A+B}{2}$ con lo que:

$$\boxed{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \tfrac{A-B}{2} \cos \tfrac{A+B}{2}}$$

[Las otras clásicas funciones trigonométricas $\operatorname{cotan} x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ no serán utilizadas en los apuntes, puesto que se pueden expresar fácilmente en términos de las dadas; algunas otras identidades trigonométricas que no se han citado aquí se proponen en los problemas].



Para definir las **funciones trigonométricas inversas** debemos restringir los intervalos de definición para que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\tan x$ sean inyectivas:

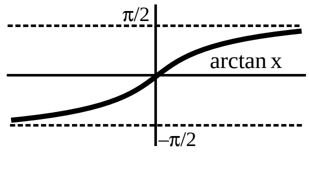
$\operatorname{arc\,sen} x$ (dom=[–1,1], im=$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) es la inversa de $\operatorname{sen} x$ restringida a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\operatorname{arc\,cos} x$ (dom=[–1,1], im=$[0, \pi]$) es la inversa de $\cos x$ restringida a $[0, \pi]$.

(El arco seno de un x no es simplemente 'el ángulo cuyo seno vale x'; hay infinitos x que tiene el mismo seno; incluso hay 2 si sólo nos preocupamos de $[0, 2\pi]$).

$\arctan x$ [dom=$\mathbf{R}$, im=$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$] es la inversa de $\tan x$ definida en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ej. $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4}) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.



[La función arco tangente aparece muchas veces en el cálculo, por ejemplo hallando primitivas].

Exponenciales y logaritmos:

b^x es fácil de definir si $x \in \mathbf{Q}$ [$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$] pero no si x es irracional (¿qué es 2^π?) y por tanto $\log_b x$ tampoco tiene sentido. Definiremos primero el logaritmo neperiano así:

$$\boxed{\log x \equiv \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}} \text{ , para } x > 0$$

[$\log x$ será siempre neperiano, el decimal $\log_{10} x$ no se utilizará]

que es la forma más corta de definirlo, aunque habría que esperar a las integrales para deducir todas sus propiedades. Admitimos que $\log x$ es estrictamente creciente en $\{x > 0\}$ y que su imagen es $\mathbf{R}$. También admitimos las propiedades clásicas:

$$\log(a\cdot b) = \log a + \log b \ , \ \log\frac{a}{b} = \log a - \log b \ , \ \log\left(a^b\right) = b\log a \ , \text{ si } a,b>0$$

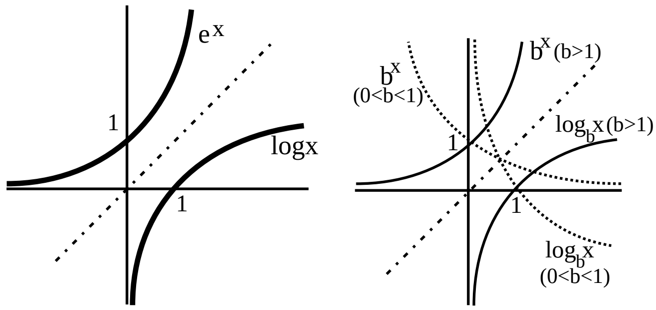
A partir de la función logaritmo, definimos:

$\boxed{\mathrm{e}^x}$ es la inversa de $\log x$, con lo que su dominio es $\mathbf{R}$ y su imagen $x > 0$.

$\boxed{x^b \equiv e^{b\log x}}$, $x > 0$;

$\boxed{b^x \equiv e^{x\log b}}$, $b > 0$, $\forall x$;

$\boxed{\log_b x \equiv \frac{\log x}{\log b}}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.



[Según la definición dada, el número e sería aquel que cumpliese $\log \mathrm{e} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dt}{t} = 1$. Utilizando las propiedades de la integral se podría aproximar su valor, pero esto será mucho más corto hacerlo cuando estudiemos Taylor. Admitimos que aproximadamente es $\mathrm{e} \approx 2.7182818...$]

De estas definiciones se podrían deducir:

$$b^0 = 1\,,\quad b^{x+y} = b^x b^y\,,\quad b^{-x} = \frac{1}{b^x}\,,\quad (b^x)^y = b^{xy}\ \ [\,b^{x^y} \text{ representa siempre } b^{(x^y)}\,]\ ,\ ...$$

Las definiciones son naturales, si han de satisfacerse estas propiedades. Así, por ejemplo:

$$x^b = [\text{exponencial inversa del logaritmo}] = \left(e^{\log x}\right)^b = [\text{pues } (b^x)^y = b^{xy}] = e^{b\log x}$$

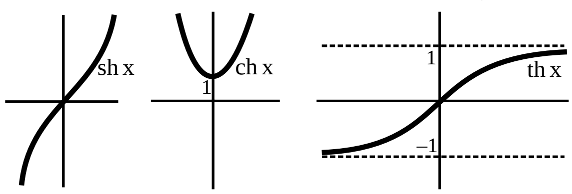
[La definición de arriba de x^b sólo vale para los $x > 0$ si b es un real cualquiera, pero no olvidemos que, por ejemplo, si $b = 7$ ó $b = 1/3$ está x^b definida $\forall x$].

Más en general (por este mismo argumento) se define:

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\log[f(x)]}} \text{ , para los } x \text{ tales que } f(x) > 0 \ .$$

Acabamos con las **funciones hiperbólicas** (seno, coseno y tangente hiperbólicas) definidas:

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ ,\quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\ ,\ \forall x}$$



Tienen propiedades similares a las trigonométricas (todas muy fáciles de comprobar):

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x\,,\ \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x\,,\ \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x\,,\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\,,\ 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,,\ldots$$

2.2. Sucesiones de números reales

$\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ es una **sucesión**: a cada natural n corresponde un real a_n .

Matemáticamente, como una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro:

Def. $\boxed{\text{Una sucesión de números reales es una función de } \mathbf{N} \text{ en } \mathbf{R}}$ $\quad a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $\; n \to a(n) \equiv a_n$

Una sucesión tiende hacia a si en todo entorno de a, por pequeño que sea, están casi todos los términos de la sucesión (todos salvo un número finito). Por ejemplo $\{\frac{1}{n}\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ tiende hacia 0 ya que fijado un entorno cualquiera del origen todos los términos de la sucesión a partir de uno dado acaban metiéndose dentro. Precisando:

Def. $\{a_n\}$ **tiene por límite** a (o **tiende** hacia a o **converge** hacia a) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo natural $n \geq N$ es $|a_n - a| < \varepsilon$. Lo representaremos por $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ó $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.
Si una sucesión $\{a_n\}$ no es convergente se dice **divergente**.

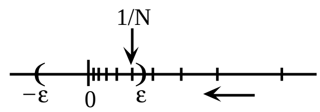
Esta definición es la primera de las definiciones rigurosas de límite de aspecto similar que veremos a lo largo del curso. Hagamos unas cuantas observaciones sobre ella:

Decir que $|a_n - a| < \varepsilon$ es equivalente a que $a_n \in B(a, \varepsilon)$. Para **todo** ε hemos de encontrar un N tal que $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, ...$ estén dentro del entorno.

El N no es único: si los $a_n \in B(a, \varepsilon)$ para $n \geq N$, también están dentro para $n \geq N^*$ si $N^* \geq N$. No se trata de hallar el menor N, basta con encontrar uno para el que se cumpla.

En sucesiones escribiremos simplemente $a_n \to a$, pues sólo tiene sentido el límite cuando $n \to \infty$ (para funciones, la x podrá tender a 0, a ∞, a $-\infty$,. . . y sí tendremos que precisarlo).

Ej. Formalicemos que $\frac{1}{n} \to 0$: dado cualquier ε (por pequeño que sea) existe N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Por tanto, si $n \geq N$, $|\frac{1}{n} - 0| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.
Se ve que N depende del ε elegido (si $\varepsilon = 0{,}1$, basta tomar $N = 11$, pero para $\varepsilon = 0{,}001$ debemos tomar $N = 1001$ o un número mayor).



Ej. La sucesión $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, ...$ es divergente, pues está claro que no todos sus términos a partir de un N están en todo entorno de -1, ni de 1, ni de cualquier otro real. Aunque haya infinitos términos en cualquier entorno de 1 (por ejemplo) hay otros infinitos que se escapan. Si $\varepsilon = 2$ todos los a_n pertenecen al entorno $B(1, 2)$, pero esto debe ocurrir $\forall\varepsilon$ y no sólo para los ε grandes.

El cálculo de límites con ε y N es, en general, muy complicado. Pero, gracias a los teoremas que veremos (demostrados utilizando los ε), sólo en contadas ocasiones y para sucesiones muy extrañas deberemos en el futuro acudir a la definición. Para manejar ésta (en ejemplos y en teoremas) se suele partir de lo que uno quiere hacer pequeño ($|a_n - a|$) y, tras algunos $<$ ó $\leq$ (la desigualdad triangular suele aparecer), se llega a una expresión de la que sea ya fácil decir para qué n es $< \varepsilon$:

Ej. Probemos sólo con la definición (pronto será innecesaria) que $\{a_n\} = \left\{\frac{2\sqrt{n}+5^{-n}}{\sqrt{n}+1}\right\} \to 2$.

$$\left|\frac{2\sqrt{n}+5^{-n}}{\sqrt{n}+1} - 2\right| = \frac{|5^{-n}-2|}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{5^{-n}+2}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{9}{\varepsilon^2}$$

Por tanto, dado cualquier ε, si N es un natural $> 9/\varepsilon^2$, para $n \geq N$ se cumple que $|a_n - 2| < \varepsilon$.

[No es la única forma de precisar el N, podríamos, por ejemplo, no haber quitado el 1 del denominador y habríamos llegado a un N distinto; lo que, desde luego, no hubiera funcionado era empezar haciendo $|a_n - 2| \leq |a_n| + 2$, pues no habría forma de hacer esto menor que cualquier ε].

Teorema: $\boxed{\{a_n\} \text{ convergente} \Rightarrow \{a_n\} \text{ acotada}}$

Sea ε=1 (por fijar un número); sabemos que $\exists N$ / si $n \geq N \Rightarrow |a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1$, $|a_n| \leq |a| + 1$. Por tanto, llamando $M = \text{máx}\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a| + 1\}$ se tiene $|a_n| \leq M \; \forall n$.

No es cierto que toda sucesión acotada sea convergente. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ es acotada y diverge. Lo que sí se deduce del teorema (no $q \Rightarrow$ no p) es que una sucesión que no está acotada seguro que diverge.

Definimos ahora un par de tipos importantes de sucesiones **divergentes** (y no acotadas):

Def. $\{a_n\}$ diverge hacia $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) si $\forall K \; \exists N \; / \; \forall n \geq N$ se cumple $a_n \geq K$.
$\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) si $\forall K \; \exists N \; / \; \forall n \geq N$ se cumple $a_n \leq K$.

[$+\infty$ y $-\infty$ son sólo símbolos, no son números; estas sucesiones no convergen a ningún número real]

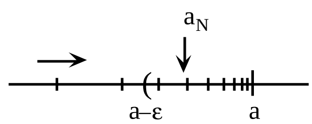
Ej. $\frac{n^2+1}{2n} \to \infty$, pues $\forall K, \frac{n^2+1}{2n} \geq \frac{n}{2} > K$ si $n \geq N$ con N cualquier natural $\geq 2K$.
$-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, ...$ no diverge hacia $-\infty$. A pesar de que contenga términos tan pequeños como queramos, no es cierto que dado **cualquier** K queden a su izquierda todos los términos a partir de un N (para los $K < 0$ es evidente que es falso). Claramente, tampoco tiende a 0 .

Def. $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1} \; \forall n$. $\{a_n\}$ es **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1} \; \forall n$. Cualquiera de las dos se dice **monótona**.

Ej. $13, 23, 33, 43, 53, ...$ (no acotada, divergente hacia $+\infty$) es creciente.
$1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/4, 1/4, ...$ es decreciente (y tiende hacia 0)

Teorema: $\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente
$\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

El axioma del extremo superior asegura que $\{a_n\}$ tiene supremo al que llamamos a . Veamos que a es el límite de $\{a_n\}$:
Sea $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $a_N > a - \varepsilon$ (si no, existirían cotas más pequeñas que a). Por tanto, si $n \geq N$, $a \geq a_n \geq a_N > a - \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$. [Análoga la otra]



Dada una sucesión $\{a_n\}$, se llama **subsucesión** de $\{a_n\}$ a cualquier sucesión formada escogiendo ordenadamente infinitos términos de $\{a_n\}$, es decir:

Def. $\{a_{n_j}\} = a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$ con los $n_j \in \mathbf{N}$ tales que $n_1 < n_2 < \cdots$ es subsucesión de $\{a_n\}$

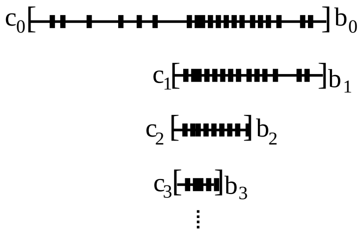
Ej. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \cdots$, $1, \frac{1}{11}, \frac{1}{111}, \frac{1}{1111}, \frac{1}{11111} \cdots$ ó $\frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \ldots$ son subsucesiones de $\{\frac{1}{n}\}$.
No lo es, en cambio, $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots$, formada con elementos desordenados de $\{\frac{1}{n}\}$.

Está claro que si $\{a_n\} \to a$ también cualquier subsucesión suya $\{a_{n_j}\} \to a$. Una forma, por tanto, de probar que una sucesión no tiene límite es encontrar dos subsucesiones suyas que converjan hacia límites distintos o alguna subsucesión que no converja.

A las subsucesiones de las sucesiones divergentes pueden pasarle, sin embargo, todo tipo de cosas. Por ejemplo, $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...$ tiene subsucesiones convergentes a infinitos límites distintos (a cada número natural), otras que divergen a $+\infty$ y otras que no tienen límite ni finito ni infinito; $-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, ...$ tiene subsucesiones que tienden a 0 y otras a $-\infty$; $1, 2, 3, 4, ...$ no tiene subsucesiones convergentes... Pero si la sucesión es acotada podemos sacar alguna conclusión.

El teorema siguiente es uno de esos típicos de matemáticas que aseguran que existe algo pero no nos dicen ni cómo es ese algo ni como buscarlo (y parecen no servir para nada; pero éste nos aparecerá en la demostración de algún teorema).

Teorema: $\boxed{\text{Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente}}$



Como $\{a_n\}$ está acotada, existe un intervalo cerrado $[c_0, b_0] \supset \{a_n\}$. Dividimos $[c_0, b_0]$ en dos intervalos iguales. Uno de ellos, al menos, contiene infinitos términos de $\{a_n\}$. Le llamamos $[c_1, b_1]$. Volvemos a dividir y a elegir $[c_2, b_2]$ con infinitos a_n ... Tenemos así una sucesión de intervalos $[c_k, b_k]$, cada uno con infinitos términos de la sucesión. La sucesión $c_0, c_1, \ldots$ es creciente y acotada superiormente por b_0 . La $b_0, b_1, \ldots$ es decreciente y está acotada inferiormente por c_0 . Así ambas tienen límite y es intuitivamente claro que el límite de las dos es el mismo. Le llamamos a . Construimos una subsucesión de $\{a_n\}$ que tiende hacia a : elegimos $a_{n_0} \in [c_0, b_0]$, $a_{n_1} \in [c_1, b_1]$ con $n_1 > n_0$ (podemos, pues hay infinitos a_n en $[c_{n_1}, b_1]$),... No es difícil formalizar que $a_{n_j} \to a$.

La siguiente definición tampoco tiene mucha utilidad práctica:

Def. $\boxed{\{a_n\} \text{ es una sucesión de } \textbf{Cauchy} \text{ si } \forall\varepsilon\ \exists N \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq N \text{ se tiene que } |a_n - a_m| < \varepsilon}$

[la diferencia entre dos términos suficientemente altos es tan pequeña como queramos]

Parece claro que si todos los términos de una sucesión se acercan a un límite se acercarán también entre sí, es decir, que toda sucesión convergente va a ser de Cauchy. Y lo contrario también es cierto para las sucesiones en **R**:

Teorema: $\boxed{\{a_n\} \text{ converge} \Leftrightarrow \{a_n\} \text{ es de Cauchy}}$

$\Rightarrow$) $\forall\varepsilon\ \exists N \ / \ k \geq N \Rightarrow |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; así pues, si $n, m \geq N$, $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Se puede probar que: $\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow \{a_n\}$ acotada (la demostración es parecida a la de las convergentes). Por lo tanto, existe subsucesión $\{a_{n_j}\}$ convergente hacia algún real a . Veamos que toda la sucesión $\{a_n\}$ tiende hacia ese a :

$\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow \exists N_1$ tal que $n, n_j \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a_{n_j}| < \frac{\varepsilon}{2}$.
$\{a_{n_j}\}$ convergente $\Rightarrow \exists N_2$ tal que $n_j \geq N_2 \Rightarrow |a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto: $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ si $n \geq N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$.

Un conjunto se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge hacia un elemento del propio conjunto. Acabamos de ver que **R** lo es. Pero, por ejemplo, **Q** no lo es: hay sucesiones de Cauchy en **Q** que no convergen a un racional (como la 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, ... obtenida añadiendo decimales de π , que es de Cauchy pero su límite se escapa de **Q**). Ello se debe a la inexistencia en **Q** del axioma del extremo superior (por esta misma razón, en **Q** hay sucesiones monótonas y acotadas sin límite en **Q** o sucesiones acotadas sin subsucesiones convergentes en **Q**). La definición de conjunto completo es importante en matemáticas avanzadas.

Un último sencillo resultado que relaciona los conjuntos cerrados y las sucesiones y que también utilizaremos en alguna demostración:

Teorema: $\boxed{\text{Si } \{a_n\} \to a \text{ y } \{a_n\} \subset A \text{ cerrado} \Rightarrow a \in A}$

Pues el límite de una sucesión, si tiene infinitos términos distintos, es un punto de acumulación de ella, y, por tanto, también de A que es cerrado. Y si $\{a_n\}$ toma sólo un número finito de valores, debe ser $a_n = a$ a partir de un N, con lo que, claramente, $a \in A$.

[Para abiertos el teorema es falso: hay sucesiones $\{a_n\} \subset A$ abierto cuyo límite no pertenece a A , como le ocurre a $\{1/n\} \subset (0,1)$].

Cálculo de límites de sucesiones.

Los siguientes teoremas nos permitirán calcular un montón de límites sin utilizar ε y N.

Teorema: Si $\{a_n\}\to a$ y $\{b_n\}\to b$ entonces:
$\{a_n+b_n\}\to a+b$, $\{a_n-b_n\}\to a-b$, $\{a_nb_n\}\to ab$, y si $b\neq 0$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}\to\frac{a}{b}$)

+) Dado $\varepsilon, \exists N_a/n\geq N_a \Rightarrow |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists N_b/n\geq N_b\Rightarrow |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.
Por tanto, $|a_n+b_n-(a+b)|\leq |a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$, si $n\geq N$=$\max\{N_a,N_b\}$.

–) Casi igual que +).

·) $|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|\leq |a_n-a||b_n|+|b_n-b||a|$. Hagamos pequeño esto:
Como $\{b_n\}\to b$, dado ε, $\exists N_b$ tal que $n\geq N_b\Rightarrow |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2|a|}$ si $a\neq 0$ (y si $a=0$, $|b_n-b||a|=0<\frac{\varepsilon}{2}$) ; $\{b_n\}$ convergente está acotada: $\exists B$ tal que $|b_n|<B$; y como $\{a_n\}\to a$, $\exists N_a$ / $n\geq N_a\Rightarrow |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2B}$. Por tanto: $|a_nb_n-ab|<\frac{\varepsilon B}{2B}+\frac{\varepsilon|a|}{2|a|}=\varepsilon$.

/) $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|ba_n-ab+ab-ab_n|}{|bb_n|}\leq\frac{K\varepsilon}{2K}+\frac{|a||b|K\varepsilon}{2|a||b|K}=\varepsilon$, si $n\geq N$ =$\max\{N_1,N_2,N_3\}$ donde:
como $\{b_n\}\to b\neq 0$, $\exists N_1$ / $n\geq N_1\Rightarrow |b_n|\geq K>0$; como $\{b_n\}\to b$, $\exists N_2$ / $n\geq N_2$ $\Rightarrow |b_n-b|<\frac{|b|K\varepsilon}{2|a|}$; y como $\{a_n\}\to a$, $\exists N_3$ / $n\geq N_3\Rightarrow |a_n-a|<\frac{K\varepsilon}{2}$.

Las operaciones que involucran las sucesiones que tienden a $+\infty$ o $-\infty$ son sólo algo más complicadas y vienen a formalizar la forma intuitiva en que se trabaja con los infinitos:

Teorema: Sean $\{c_n\}\to 0$, $\{p_n\}\to p>0$, $\{q_n\}\to q<0$, $\{a_n\}$ acotada , $\{i_n\}\to\infty$.
Entonces: $\{a_n+i_n\}\to\infty$, $\{a_n-i_n\}\to-\infty$, $\{c_na_n\}\to 0$, $\{a_n/i_n\}\to 0$,
$\{p_ni_n\}\to\infty$, $\{q_ni_n\}\to-\infty$, $\{i_n/p_n\}\to\infty$, $\{i_n/q_n\}\to-\infty$, ...

[como $\{c_n\},\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ están acotadas, los resultados con la $\{a_n\}$ son también ciertos con ellas]

Probemos para cansarnos poco sólo un par de ellas, por ejemplo la primera y la última:
Sea $|a_n|\leq A$, $\forall K, a_n+i_n\geq i_n-A\geq K$, pues $i_n\geq K+A$, si n es suficientemente grande.
Si n grande $i_n>0$ y $\exists Q/Q<q_n<0\Rightarrow\forall K$, $i_n/q_n<i_n/Q<K$, pues $i_n>QK$ si n grande.

Podemos abreviar el teorema (¡pero recordando que es sólo una notación!) escribiendo:

"acot$\pm\infty=\pm\infty$" , "0·acot=0" , "$\frac{acot}{\infty}=0$" , "$(\pm 1)\cdot\infty=\pm\infty$" , "$\frac{\infty}{\pm 1}=\pm\infty$" , ...

y también es cierto: "$\infty+\infty=\infty$", "$\infty\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$", "$(-1)\cdot(-\infty)=\infty$", ... Es tentador escribir "$1/0=\infty$", pero es falso en general [$\{(-1)^n/n\}\to 0$, pero su inversa $\{(-1)^nn\}$ no tiene límite]. Sí es cierto que si $\{p_n\}\to p>0$, $\{c_n\}\to 0$ y $c_n>0$ entonces $p_n/c_n\to\infty$.

Los límites con potencias se deducirán de los límites de funciones. Por ahora, admitimos:

Teorema: Sean $\{b_n\}\to b$, $\{p_n\}\to p>0$, $\{q_n\}\to q<0$, $\{i_n\}\to\infty$.
Entonces: $\{p_n^{b_n}\}\to p^b$, $\{i_n^{p_n}\}\to\infty$, $\{i_n^{q_n}\}\to 0$, $\{p_n^{i_n}\}\to\begin{cases}\infty \text{ si } p>1\\ 0 \text{ si } 0<p<1\end{cases}$

Podríamos escribir resumiendo, "$\infty^1=\infty$" , "$\infty^{-1}=0$" , "$2^\infty=\infty$" ó "$(1/2)^\infty=0$" . Obsérvese que no hay ninguna en que la base sea negativa [por ejemplo, no está escrito $(-\infty)^1$ ni $(-2)^\infty$]: las potencias racionales (y menos las reales, definidas a través del logaritmo) pueden no existir [la sucesión $\{(-2)^{1/2n}\}$, por ejemplo, no existe para ningún n].

A pesar de todos los teoremas aún quedan las llamadas **indeterminaciones** que resumimos:

$$\boxed{\infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \tfrac{0}{0}\ ,\ \tfrac{\infty}{\infty}\ ,\ 1^{\infty}\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0}$$

Como siempre hay que interpretarlas en términos de sucesiones. Así, la primera dice que si dos sucesiones tienden a ∞ no se puede, en principio, asegurar hacia qué tiende su diferencia (por ejemplo: $n-n^2\to-\infty$, $n-n\to 0$ y $n^2-n\to\infty$). Para resolver alguna de ellas puede bastar un truco algebraico como los que veremos en los ejemplos, pero en muchos casos se necesitarán técnicas de límites de funciones (L'Hôpital o Taylor) y habrá que esperar para saber calcular el límite.

Admitimos también los siguientes límites indeterminados que necesitaremos en series:

$$\boxed{\frac{\log n}{n^a}\to 0\ ,\ \forall a>0\ ;\qquad \sqrt[n]{n}\to 1\ ;\qquad \{(1+c_n)^{1/c_n}\}\to \mathrm{e}\ ,\ \text{si } \{c_n\}\to 0}$$

[El primero, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, será consecuencia de que: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=0$ (por L'Hôpital). De él saldrá el segundo: $x^{1/x}=e^{\log x/x}\to \mathrm{e}^0=1$. El último límite (del tipo 1^∞) se deducirá de que la función $(1+x)^{1/x}\to\mathrm{e}$ cuando $x\to 0$. En vez de con integrales, se podría definir aquí el número e como el límite de la sucesión $(1+\frac{1}{n})^n$ (podríamos ver que es creciente y acotada superiormente)].

Ej. Gracias a todo el trabajo anterior con los ε ahora ya casi nunca habrá que acudir a la definición.

$$\frac{n^2+(-1)^n}{3n^3+2n}=\frac{1/n+(-1)^n/n^3}{3+2/n^2}\to\frac{0+0}{3+0}=0\ ,\quad \frac{n^3+(-1)^n}{3n^3+2n}=\frac{1+(-1)^n/n^3}{3+2/n^2}\to\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}\ ,$$

$$\frac{n^4+(-1)^n}{3n^3+2n}=\frac{n+(-1)^n/n^3}{3+2/n^2}\to\text{“}\,\frac{\infty+0}{3+0}=\infty\text{”}\ .$$

[Las tres eran indeterminaciones y hemos tenido que reescribir la sucesión; en el cálculo hemos utilizado varios teoremas: $n^3=n\cdot(n\cdot n)\to\infty$ porque el producto de dos sucesiones que tienden a ∞ tiende a ∞; $(-1)^n/n^3\to 0$ porque "acotado/∞=0"; $1+(-1)^n/n^3\to 1$ porque la suma de sucesiones tiende a la suma de los límites; límites de cocientes, más límites con ∞...]

Ej. $\dfrac{\sqrt{n^3-1}-n}{5n^2-7\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{1-1/n^3}-1/\sqrt{n}}{5\sqrt{n}-7/n}\to\text{“}\,\dfrac{1-0}{5\cdot\infty-0}=0\,\text{”}$,

o bien, $\dfrac{\sqrt{n^3-1}-n}{5n^2-7\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{1/n-1/n^4}-1/n}{5-7/(n\sqrt{n})}\to\dfrac{0-0}{5-0}=0$.

[Aquí hemos utilizado además que $\lim\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim a_n}$ y "$\sqrt{\infty}=\infty$"que son casos particulares de los límites de potencias vistos; lo probaremos directamente en problemas].

Como se ve, **para calcular límites de cocientes de polinomios y raíces basta comparar los términos con la máxima potencia** de numerador y denominador (y se podrán hacer a ojo: si el numerador es más pequeño, el cociente tenderá a 0, si ambos son del mismo orden aparecen los coeficientes de los términos más gordos y si el denominador es mayor el límite será + o − infinito).

Ej. $(-1)^n\dfrac{13n}{n+1}$ diverge, pues hay subsucesiones con distintos límites (pares $\to 13$, impares $\to -13$).

Ej. $\sqrt{n^3-1}-n=n\left[\sqrt{n-\frac{1}{n^2}}-1\right]\to\text{“}\infty\cdot(\infty-1)=\infty\text{”}$

[hemos sacado factor común (lo habitual para $\infty-\infty$) para dejar claro que término mandaba]

Ej. $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{[\sqrt{n}-\sqrt{n-1}][\sqrt{n}+\sqrt{n-1}]}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to 0$

[los ∞ eran del mismo orden y ha habido que racionalizar; sacar factor común no servía aquí]

Ej. $\dfrac{1+\cdots+n}{n^2+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}\to\dfrac{1}{2}$

[el número de sumandos crece con n; no es cierto que como $\frac{n}{n^2}\to 0$ nuestra sucesión también]

Ej. $\dfrac{n^2}{(n-7)!}=\dfrac{n^2}{(n-7)(n-6)}\,\dfrac{1}{(n-5)!}\to 1\cdot 0=0$

Ej. $\big[(-1)^n+\sqrt{n}\,\big]^3\to$ "$(\text{acot}{+}\infty)^3=\infty^3=\infty$"

Ej. $\dfrac{3^n+2^{n+1}}{3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1+2(2/3)^n}{3+(2/3)^n}\to\dfrac{1+0}{3+0}=\dfrac{1}{3}$

Ej. $\dfrac{\sqrt[3]{n}+\log n}{\sqrt[3]{n+\log n}}=\dfrac{1+\frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{\log n}{n}}}\to 1$

[hemos ya admitido que $\log n$ es mucho más pequeño que $n^a, a>0$]

Ej. $n^{1/n-1}\to$ "$\infty^{-1}=0$"; $\quad n^{1/(n-1)}=(n^{1/n})^{\frac{n}{n-1}}\to 1^1=1$;

$(7n^3-1)^{1/n}=(n^{1/n})^3\big(7-\frac{1}{n^3}\big)^{1/n}\to 1^3\cdot 7^0=1$

[utilizando en los dos últimos que $(a^b)^c=a^{bc}$ y el límite admitido en la página anterior $n^{1/n}\to 1$]

Ej. $\left[\dfrac{6n+1}{3n+2}\right]^{-n^2}\to$" $2^{-\infty}=\frac{1}{2^\infty}=0$ "; $\left[\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2}\right]^{-n^2}=\left[(1-\dfrac{1}{3n^2+2})^{-(3n^2+2)}\right]^{\frac{n^2}{3n^2+2}}\to e^{1/3}$

[la primera era sencilla, pero como $1^{-\infty}$ es indeterminado, en la segunda buscamos el número e identificando la $\{c_n\}\to 0$ y poniendo lo que sobra fuera del corchete]

Ej. $\{\operatorname{sen} n\}=0.841..,\ 0.909..,\ 0.141..,\ \text{-}0.757..,\ \text{-}0.959..,\ \text{-}0.279..,\ 0.656..,\ 0.989..,\ 0.412..,\ \ldots$
[las funciones trigonométricas siempre en radianes]; parece que no tiene límite y se prueba (es difícil) que es así; como es acotada, tendrá subsucesiones convergentes, pero no sabemos cuáles.

[Cuando veamos que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log x$, ...son continuas en todo su dominio podremos decir que:

si $\{b_n\}\to b$ entonces $\{\operatorname{sen} b_n\}\to\operatorname{sen} b$, $\{\cos b_n\}\to\cos b$, $\{\log b_n\}\to\log b$ $(b>0)$, ...

y con ello será muy fácil calcular, por ejemplo, $\{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}\}\to\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$ ó $\{\log\frac{n+5}{n}\}\to\log 1=0$].

Ej. Calculemos el límite de a^n para todos los $a\in\mathbf{R}$ sin hacer uso de teoremas no demostrados:

si $a>1$, $a=1+h$, con $h>0$; desarrollando el binomio:

$a^n=(1+h)^n=1+nh+\cdots>nh>K$, $\forall K$, si n gordo $\Rightarrow a^n\to\infty$;

si $a=1$, $1^n=1,1,1,...\to 1$ (esto no es ninguna indeterminación);

si $a\in(0,1)$, $1/a>1$, $a^n=\frac{1}{(1/a)^n}\to$ "$\frac{1}{\infty}=0$" ;

si $a=0$, $0^n=0,0,0,...\to 0$ (no estaba en el teorema de las potencias) ;

si $a\in(-1,0)$, $a^n=(-1)^n(-a)^n\to$ "acot$\cdot$0 = 0" (tampoco estaba);

si $a=-1$, $(-1)^n=-1,1,-1,1,...$ diverge;

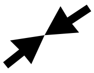
si $a<-1$, $a^n=(-1)^n(-a)^n$; como $(-a)^n\to\infty$, a^n toma valores grandes positivos y negativos $\Rightarrow$ diverge (ni siquiera tiende a $+\infty$ o $-\infty$).

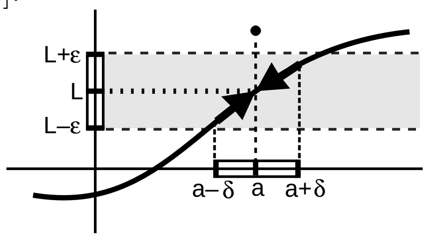
2.3. Límites de funciones y funciones continuas

Def. f **tiende a** L (o **tiene por límite** L) **cuando** x **tiende hacia** a si
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si x cumple $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.
Esto se representa: $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}L$ o bien $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

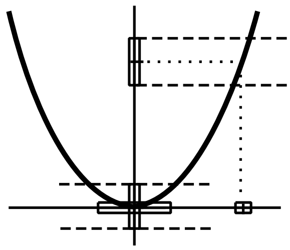
[es decir, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $x\in B^*(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in B(L,\varepsilon)$]

[En la definición está implícito que a es un punto interior de $\mathrm{dom}f\cup\{a\}$ para que f tenga sentido en B^* ; también está claro que no importa para nada el valor de f en a , ni siquiera si la función está o no definida en el punto; también es evidente que el δ no es único: si hemos encontrado un δ nos vale también cualquier δ^* más pequeño].

Gráficamente: Para todo  debe ser posible encontrar 
tal que  esté dentro de la banda 
[evidentemente el δ no es único: si hemos encontrado un δ nos vale también cualquier δ^* más pequeño]



Ej. $f_1(x)=x^2$. Gráficamente está claro que $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=a^2\ \forall a$.
Comprobémoslo para $a=0$. Dado cualquier δ , tomando $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ se tiene que si $0<|x-0|=|x|<\delta=\sqrt{\varepsilon}\Rightarrow|x^2-0^2|=|x|^2<\varepsilon$.
Para otros a es difícil hallar el límite utilizando simplemente la definición, pero será un límite trivial en cuanto dispongamos de los teoremas que veremos.

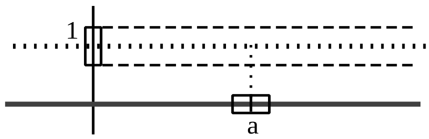


Ej. $f_2(x)=x^3\arctan\frac{1}{x}$. Esta función no está definida en 0 , pero veamos que $f_2(x)\to 0$ si $x\to 0$.
Para cualquier ε debe ser $|f_2(x)|<\varepsilon$ si $|x|$ es lo suficientemente pequeño. Como

$$|x^3\arctan\tfrac{1}{x}|\le\tfrac{\pi}{2}|x^3|=\tfrac{\pi}{2}|x|^3\text{ , bastará tomar }|x|<\delta=\sqrt[3]{\tfrac{2\varepsilon}{\pi}}\text{ para que }|x^3\arctan\tfrac{1}{x}|<\varepsilon\text{ .}$$

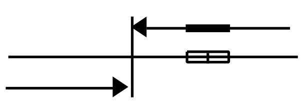
[Como siempre, para trabajar con una definición de este tipo (que será innecesaria cuando veamos unos cuantos teoremas), partimos de lo que queremos hacer pequeño y utilizamos desigualdades crecientes hasta que quede claro cuál es el δ que garantiza que lo inicial es $<\varepsilon$].

Ej. $f_3(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ irracional}\end{cases}$. Intuitivamente parece claro que f_3 no tiene límite para ningún a .



Por ejemplo, $L=1$ no puede ser el límite de $f_3(x)$ cuando $x\to a$ (racional o irracional) pues por pequeño que sea el δ hay siempre x del entorno (los irracionales) con $|f_3(x)-1|>\varepsilon$ (para los $\varepsilon<1$). Lo mismo pasa con otros posibles límites. [La negación de que $f\to L$ cuando $x\to a$ es la siguiente afirmación: existe un ε tal que para todo δ existen x con $|x-a|<\delta$ pero cumpliendo $|f(x)-L|\ge\varepsilon$ (la negación de que 'en toda clase hay algún estudiante que, si se examina, aprueba', es que 'hay una clase en que todos los estudiantes que se examinan suspenden')].

Ej. $f_4(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$. Es fácil ver que $\lim\limits_{x\to a}f_4(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } a<0\\ 1 & \text{si } a>0\end{cases}$ (basta tomar $\delta<|a|$).



Pero no tiene límite cuando $x\to 0$. Para $\varepsilon<1$ hay x con $|x|<\delta$ para los que $|f_4(x)-L|\ge\varepsilon$, por pequeño que sea δ, sea quien sea L (1, -1 o cualquier otro número). Sin embargo, tiende a 1 ó -1 si sólo nos fijamos en los x positivos o en x los negativos (lo que no sucede con f_3).

Este último ejemplo nos lleva a definir los **límites laterales**:

Def.

f tiende a L **por la derecha** (**izquierda**) cuando $x \to a$ [$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ ($\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$)] si $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si x cumple $0 < x-a < \delta$ $(0 < a-x < \delta)$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$

Como $0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow 0 < x-a < \delta$ y $0 < a-x < \delta$, es inmediato que:

Teorema: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \text{ existen } \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \text{ y } \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\text{, y coinciden con } L}$

Por tanto, si no existe un límite lateral, o si existiendo no coinciden, no existe el límite.

Ej. $\lim\limits_{x\to 0^+} f_4(x) = 1$, pues $\forall\varepsilon$, para cualquier δ que escojamos, si $0 < x < \delta$ es $|f_4(x) - 1| = 0 < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f_4(x) = -1$, pues $\forall\varepsilon$ para cualquier δ, $0 < -x < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < 0 \Rightarrow |f_4(x) - (-1)| = 0 < \varepsilon$.

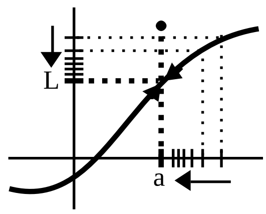
Esto prueba que no existe el $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x)$. [Sí existe $\lim\limits_{x\to 1^-} f_4(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f_4(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1} f_4(x)$].

Para ver si una f tiene límite, en general, no será necesario calcular los laterales. Sólo lo haremos cuando cuando la f sea diferente a ambos lados de a (como en el ejemplo anterior en $x = 0$).

El siguiente teorema nos será muy útil para demostrar fácilmente bastantes otros a partir de las propiedades de las sucesiones y, en el futuro, para calcular límites de sucesiones que aún no sabemos hacer utilizando las potentes técnicas de límites de funciones.

Teorema:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ **toda** sucesión $\{a_n\} \subset \mathrm{dom} f - \{a\}$ con $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ satisface $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} L$



$\Rightarrow$) Sabemos que $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ / si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Como $a_n \to a$, $\exists N$ / $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \delta$ y por tanto $|f(a_n) - L| < \varepsilon$, con lo que la sucesión $\{f(a_n)\}$ tiende a L .

$\Leftarrow$) Si $f(x)$ no tiende a L existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x con $0 < |x-a| < \delta$ pero $|f(x) - L| > \varepsilon$. En particular, para todo n existe algún a_n con $0 < |a_n - a| < 1/n$ pero $|f(a_n) - L| > \varepsilon$: existe, pues, $\{a_n\}$ que converge hacia a pero con $\{f(a_n)\} \not\to L$.

Gracias al teorema, para ver que una f **no tiene límite** en a bastará encontrar una $\{a_n\}$ (formada por puntos de $\mathrm{dom} f$) que tienda hacia a y tal que $\{f(a_n)\}$ diverja, o bien encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ tiendan hacia distintos límites. Esto nos permite formalizar en bastantes ocasiones de forma sencilla la no existencia de límites sin tener que acudir a la negación de la definición:

Ej. f_3 no tiene límite en a pues si $\{a_n\}$ es una sucesión de irracionales y $\{b_n\}$ de racionales tendiendo hacia a , se tiene que $f(a_n) \to 0$ mientras que $f(b_n) \to 1$. (Dichas sucesiones siempre se pueden encontrar, pues en cualquier entorno de a hay infinitos racionales e irracionales).

Ej. Como $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ pero $\{f_4(a_n)\} = -1, 1, -1, 1, ...$ diverge $\Rightarrow f_4$ no tiene límite en $x = 0$.

[Para otras sucesiones $b_n \to 0$ sí existe el límite de $\{f_4(b_n)\}$ (por ejemplo, para cualquier $\{b_n\}$ con $b_n > 0$ dicho límite es 1); pero el teorema pide que **todas** converjan y que el límite de **todas** sea el mismo; por eso no es útil, en general, para calcular límites de funciones concretas].

Otras definiciones incluyen "∞" (**no** son límites normales; como siempre ∞ es sólo un símbolo):

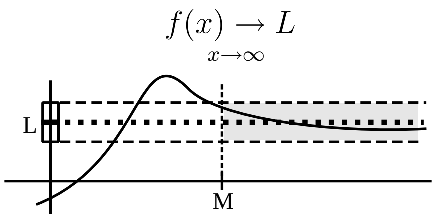
Def. $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ [\lim_{x\to-\infty} f(x) = L] \text{ si } \forall\varepsilon > 0 \ \exists M \ / \text{ si } x > M \ [x < M] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$

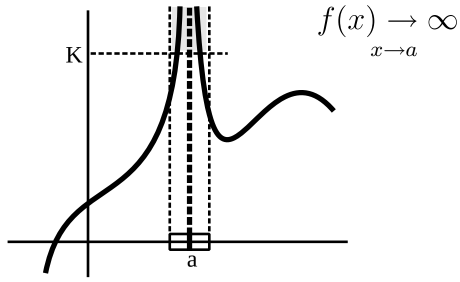
Def. $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty \ [-\infty] \text{ si } \forall K \ \exists\delta > 0 \ / \text{ si } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K \ [f(x) < K]}$

Def. $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ si } \forall K \ \exists M \ / \text{ si } x > M \Rightarrow f(x) > K}$

[Análogamente $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, ...]

Un par de interpretaciones geométricas:





Ej. La función $f_5(x) = \frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$ pues $\forall\varepsilon > 0 \ \exists M = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que si $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$, y tiende a ∞ cuando $x \to 0^+$ pues $\forall K \ \exists\delta = \frac{1}{K}$ tal que si $0 < x - 0 < \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1}{x} > K$.

Ej. $f_6(x) = \sqrt[3]{x} + \operatorname{th} x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, porque $\forall K \ \exists M$ tal que $f_6(x) > \sqrt[3]{x} - 1 > K$ si $x > M = (K+1)^3$.

Se pueden probar relaciones entre estos nuevos 'límites' y los de sucesiones. Por ejemplo:

Teorema:

$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\} \subset \text{dom} f \text{ con } a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ cumple } f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L}$

Teorema:

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\} \subset \text{dom} f - \{a\} \text{ con } a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \text{ cumple } f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty}$

Como consecuencia de los límites de sucesiones se puede demostrar ahora fácilmente:

Teorema:

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \, , \ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M \Rightarrow f \pm g \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \pm M \, , \ f \cdot g \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \cdot M \, .$$

$$\text{Si además } M \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{L}{M} \, .$$

Lo anterior es válido si se sustituye a por a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$.

Todas se demuestran igual. Por ejemplo, la primera: Sea $a_n \to a$, $a_n \neq a$. Por tender la suma de dos sucesiones a la suma de los límites:

$$\lim_{n\to\infty} (f \pm g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(a_n) = L \pm M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (f \pm g)(x) = L \pm M$$

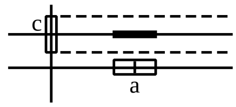
[se pueden probar directamente, como en los libros (como el Spivak) que tratan antes las funciones que las sucesiones; la de la + por ejemplo:

$\forall\varepsilon$, $|f(x) + g(x) - L - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, siendo δ_1 y δ_2 tales que: $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |x-a| < \delta_1$, $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |x-a| < \delta_2$ (estos δ existen por tener límite f y g)].

A partir del concepto de límite definimos la continuidad. Ahora sí importa el valor de f en a:

Def. f es **continua** en un punto a (interior al dominio de f) si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, si $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si x cumple $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

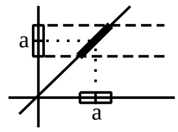
[luego una f no es continua si no existe límite o no existe $f(a)$ o si existiendo no coinciden]



Ej. Cuatro funciones continuas en cualquier punto a son:

$f(x) = c$: $\forall\varepsilon > 0$ vale cualquier δ para que $|x - a| < \delta \Rightarrow |c - c| = 0 < \varepsilon$.

$f(x) = x$: $\forall\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon$ para que $|x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$.



$f(x) = |x|$: $\forall\varepsilon > 0$ tomando $\delta = \varepsilon$ es $||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$.

$f(x) = \operatorname{sen} x$: $\forall\varepsilon > 0$, si $|x - a| < \delta = \varepsilon$ se cumple:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = |2 \operatorname{sen} \tfrac{x-a}{2} \cos \tfrac{x+a}{2}| \leq 2|\operatorname{sen} \tfrac{x-a}{2}| \leq 2\tfrac{|x-a|}{2} < \varepsilon.$$

Ej. $f_2(x) = x^3 \arctan \frac{1}{x}$ no es continua en 0 , pues no está definida en ese punto. Pero si definimos $f_2(0) = 0$ sí lo es, pues, como vimos, $f_2(x) \to 0$ si $x \to 0$. Si definiésemos $f_2(0) = 7$ sería discontinua. [f_4 no puede hacerse continua en 0, definamos como definamos $f_4(0)$, pues no posee límite en $x = 0$]

Del teorema análogo de límites se obtiene la caracterización de la continuidad con sucesiones:

Teorema:

f es continua en $a \Leftrightarrow$ **toda** sucesión $\{a_n\} \subset \operatorname{dom} f$ con $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ cumple $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{f(a)}$

[por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \mathrm{f}(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ si f es continua (no, si es discontinua)]

Hemos definido la continuidad en un punto. En **intervalos**:

Def. f es continua en (a,b) si es continua en todo x de (a,b) .
f es continua en [a,b] si es continua en (a,b) , $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

[No podemos decir simplemente 'continua en todo $x \in [a, b]$', pues a y b no son puntos interiores]

De los teoremas para los límites de funciones se deduce:

Teorema: Si f y g son continuas en a entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ son continuas en a .
Si además $g(a) \neq 0$, también f/g es continua en a .

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) \underset{\text{de límites)}}{\overset{\text{(propiedad}}{=}} \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$. Las otras igual.

Teorema: g continua en a y f continua en $g(a) \Rightarrow f \circ g$ continua en a .

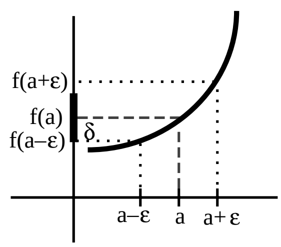
$$a_n \to a \underset{[g \text{ cont. en } a]}{\Rightarrow} g(a_n) \to g(a) \underset{[f \text{ cont. en } g(a)]}{\Rightarrow} (f \circ g)(a_n) = f(g(a_n)) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

Teorema:

f continua en a y estrictamente monótona en un entorno de $a \Rightarrow f^{-1}$ continua en $f(a)$.

Supongamos f estrictamente creciente (si fuera decreciente, se demostraría análogamente). $\forall\varepsilon$ buscamos δ tal que $|y - f(a)| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$

(o sea, $f(a) - \delta < y < f(a) + \delta \Rightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon$).



El dibujo sugiere tomar $\delta = \min\{f(a+\varepsilon) - f(a), f(a) - f(a-\varepsilon)\} > 0$.

Entonces: $f(a) - \delta < y < f(a) + \delta \Rightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon)$ [porque $f(a) + \delta \leq f(a + \varepsilon)$, $f(a - \varepsilon) \leq f(a) - \delta$] $\Rightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon$ [porque f^{-1} creciente]

Comprobemos, utilizando los teoremas anteriores, que:

todas las funciones elementales (descritas en 2.1) **son continuas en su dominio**:

Los **polinomios** $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ son continuos en todo $\mathbf{R}$

(ya que son sumas y productos de funciones continuas en todo a de $\mathbf{R}$).

Las **funciones racionales** (cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$) son continuas $\forall a$ con $Q(a) \neq 0$.

Las **raíces** $\sqrt[n]{x}$ son continuas en su dominio: $\mathbf{R}$ si n impar, $\mathbf{R}_+$ si n par (en $x = 0$, hablamos de límite por la derecha), por ser inversas de funciones estrictamente crecientes y continuas.

Las **funciones trigonométricas y sus inversas** también son continuas en su dominio:

Ya vimos que $\operatorname{sen} x$ era continua $\forall a \in \mathbf{R}$.

$\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ es continua $\forall a$ por ser composición de funciones continuas $\forall a$.

$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es continua si $\cos x \neq 0$, es decir, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

$\operatorname{arc\,sen} x$, $\arccos x$ en $[-1, 1]$ y $\arctan x\, \forall x$, inversas de monótonas continuas, son continuas.

Para probar la continuidad de **exponenciales** y **logaritmos**, con la definición dada, hay que esperar al estudio de las integrales. El teorema fundamental de cálculo integral asegurará que

$\log x \equiv \int_1^x \frac{dt}{t}$ es continua $\forall x > 0$. De ahí deducimos la continuidad de las demás:

e^x es continua en $\mathbf{R}$ por ser inversa de continua. Y por ser composición de continuas:

$x^b \equiv e^{b \log x}$ continua en $(0, \infty)$ [si $b > 0$ en $[0, \infty)$, tomando 0 como su valor en 0],

$b^x \equiv e^{x \log b}$ $(b > 0)$ continua $\forall x$, $\log_b x \equiv \frac{\log x}{\log b}$ $(b > 0, b \neq 1)$ continua $\forall x > 0$.

Las **funciones hiperbólicas**, sumas y cocientes con denominadores no nulos de funciones continuas, son también continuas en todo su dominio $\mathbf{R}$.

Combinando todo lo anterior podemos afirmar que muchísimas funciones son continuas en casi todos los puntos sin necesidad de aplicar la definición (el trabajo con los ε lo hemos hecho en los teoremas, sobre todo en los de sucesiones, y sólo para funciones muy raras habrá que acudir a ellos).

Ej. $f_7(x) = \dfrac{e^{x/(x-1)} + \arctan[\log(x^2+1)] - \cos^3 x + \sqrt[4]{x}}{\operatorname{sh} x\, [3 + \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3}]}$ es continua en (0,1)∩(1,3] :

el numerador lo es en $[0, \infty) - \{1\}$, pues $\arctan[\log(x^2+1)] - \cos^3 x$ es continua en $\mathbf{R}$ (suma de composiciones de continuas), la raíz en $\mathbf{R}_+$ y la exponencial si $x \neq 1$; el denominador es continuo en $[-3, 3]$ (por el $\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3}$) y sólo se anula en 0 (arcsen como mucho vale $-\pi/2$ y sólo $\operatorname{sh} 0 = 0$).

Teniendo tantas funciones continuas el **cálculo** de límites será muy sencillo casi siempre pues bastará sustituir x por a en la expresión de la función: $f_7(x) \to f_7(2)$ si $x \to 2$, por ejemplo, por ser f_7 continua en 2. También hay otros límites sencillos utilizando propiedades análogas a las de sucesiones (demostrables basándose en aquellas, y utilizando los teoremas que relacionan límites de funciones y de sucesiones (o directamente)) que podemos esquematizar:

"$c \pm \infty = \pm\infty$" , "$\infty + \infty = \infty$" , "acot$\pm\infty = \pm\infty$" , "$\infty \cdot \infty = \infty$" , "0·acot=0" , "$\frac{c}{\pm\infty} = 0$" , "$\frac{\text{acot}}{\pm\infty} = 0$" , "$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$" si $c > 0$, "$\frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$" si $c > 0$, "$\frac{c}{\pm 0} = \pm\infty$" si $c > 0$, "$\log(\infty) = \infty$" , "$e^{\infty} = \infty$" , "$e^{-\infty} = 0$" , ...

propiedades que hay que leer en el sentido de límites; por ejemplo, "$c \pm \infty = \pm\infty$" significa que si una función tiende a c y otra a + ó a − ∞ (cuando $x \to a$ ó a^+ ó a^- ó $+\infty$ ó $-\infty$), la suma de ambas tiende, respectivamente, a $+\infty$ ó $-\infty$. La notación $+0$ (-0) significa que $f \to 0$ siendo $f > 0$ $(f < 0)$.

[Con esto, se tiene que $\lim\limits_{x \to 1^+} f_7(x) = \infty$ $(\frac{c+\infty}{c*})$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f_7(x) = \dfrac{\arctan[\log 2] - \cos^3 1 + 1}{\operatorname{sh} 1 [3 + \operatorname{arc\,sen}(1/3)]}$].

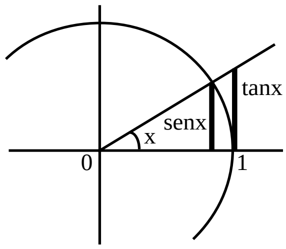
Como ocurría en sucesiones, a pesar de tanto teorema siguen quedando límites difíciles: los **indeterminados**, que sólo sabremos calcular una vez que estudiemos derivadas (por ejemplo, el límite de f_7 si $x \to 0^+$, pues es de la forma $\frac{0}{0}$). Recordamos que las indeterminaciones son:

$$\boxed{\infty - \infty \ , \ 0 \cdot \infty \ , \ \tfrac{0}{0} \ , \ \tfrac{\infty}{\infty} \ , \ 1^\infty \ , \ 0^0 \ , \ \infty^0}$$

Vamos a calcular un primer límite indeterminado que pronto vamos a necesitar (será inmediato con L'Hôpital o polinomios de Taylor). Usamos sólo propiedades trigonométricas (basadas en la no muy rigurosa definición de $\operatorname{sen} x$, que ya hemos dicho que aceptamos) y el teorema:

Teorema: Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y $\text{lím}\, f = \text{lím}\, h = L \Rightarrow \text{lím}\, g = L$ ($x \to a$, a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$, todos valen)

pues $L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$,
y los $<$ de los extremos se dan porque $f, h \to L$.



$\boxed{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1}$. Si $x > 0$, por el significado geométrico de $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$:
$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$.
Como $\cos x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, el teorema de arriba prueba el límite para $x > 0$.
Si $x < 0$, por ser $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}$, reducimos el límite al anterior.

En el cálculo de límites será, en ocasiones, conveniente realizar **cambios de variable** como:
Teorema [cambio $t = g(x)$]:

$$\boxed{\text{Si } g \text{ es continua en } a \text{ , } g(x) \neq g(a) \text{ si } x \neq a \text{ y } \lim_{t\to g(a)} f(t) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(g(x)) = L}$$

[casi igual que la demostración de la continuidad de $f \circ g$]

Ej. Con este teorema podemos deducir del límite de arriba algún otro del tipo $\frac{0}{0}$:
$\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{\operatorname{sen}(x+5)}{x+5} = 1$ [$t = g(x) = x + 5$ es continua, no se anula si $x \neq -5$ y $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1$] .

Otro que exige algo de ingenio (pero que será muy fácil cuando estudiemos los desarrollos de Taylor):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos x} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^2 = \frac{1}{2} \ .$$

Más fáciles de calcular son (no son indeterminados):
$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{2}{\pi}$, $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ [“$\frac{\text{acot}}{\pm\infty}$”] , $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} = 0$ [“0·acot” o reduciéndolo al anterior]

Complicándolo un poco: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos(x^2)} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$.

Como ningún teorema nos dice nada sobre el siguiente, tenemos que acudir a la definición:
$\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\tan(x^2)}{x}$ no existe porque la función se va al infinito infinitas veces (si $x = [\frac{\pi}{2} + k\pi]^{1/2}$)
y por tanto su gráfica se sale de la banda limitada por $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ sea cuál sea el L .

De cada límite de funciones podemos deducir un montón de **límites de sucesiones** gracias a los teoremas que los relacionan (pero por ahora solo sabemos calcular tres o cuatro indeterminados; en el futuro hallaremos muchísimos más):

Ej. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos \tfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 1$, porque $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$, $\cos x$ es continua en $x = 0$ y $\cos 0 = 1$.

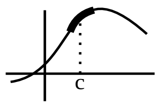
Ej. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{n^2} = 1$, porque $\frac{1}{n^2} \to 0$ y $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$.

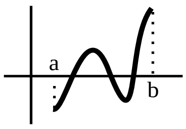
2.4. Teoremas sobre funciones continuas en intervalos

Teorema:

$$\boxed{f \text{ continua en } c \text{ y } f(c)>0\ [<0] \Rightarrow \exists\delta>0 \text{ tal que } f(x)>0\ [<0] \text{ si } x\in(c-\delta,c+\delta)}$$

Dado $\varepsilon = f(c)$, $\exists\delta>0/$ si $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<f(c) \Rightarrow$
$f(x)-f(c)>-f(c) \Rightarrow f(x)>0$ [si $f(c)<0$ tomamos $\varepsilon=-f(c)$]



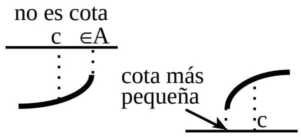


Teorema: (de **Bolzano** para funciones continuas):

$$\boxed{\begin{gathered} f \text{ continua en } [a,b] \text{ y } f(a)<0<f(b) \Rightarrow \\ \text{existe algún } c\in(a,b) \text{ tal que } f(c)=0 \end{gathered}}$$

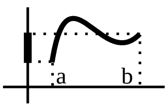
[la gráfica corta el eje x en algún punto (el teorema no dice dónde), quizás en más de uno]

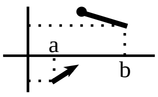
Sea $A=\{x\in$[a,b]: $f(x)\leq 0\}\neq\phi$ ($a\in A$) y acotado superiormente (por b) $\Rightarrow$ existe c=sup$A$.
Probemos que $f(c)=0$:
Si $f(c)<0 \Rightarrow \exists\delta/f(x)<0$ en $(c-\delta,c+\delta)$ y c no sería cota de A.
Si $f(c)>0 \Rightarrow \exists\delta/f(x)>0$ en $(c-\delta,c+\delta)$ y habría cotas menores.
En ninguno de los dos casos c podría ser el supremo de A .



Teorema:

$$\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow f \text{ toma todos los valores comprendidos entre } f(a) \text{ y } f(b)}$$



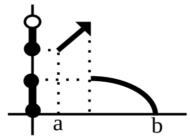


[normalmente tomará más y si f no es continua, no tiene que tomarlos, como muestran los dibujos de la izquierda]

Si $f(a)<f(b)$, sea p con $f(a)<p<f(b)$. La función $g=f-p$ es continua en $[a,b]$ con $g(a)<0<g(b)$. El teorema de Bolzano asegura que existe $c\in(a,b)$ con $g(c)=0$, es decir, con $f(c)=p$. Si $f(a)>p>f(b)$, como $-f$ es continua y $-f(a)<-p<-f(b) \Rightarrow \exists c\in(a,b)$ tal que $-f(c)=-p$.

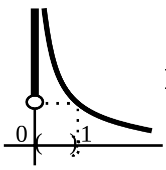
Hemos hablado de conjuntos acotados y definido máximo de un conjunto, pero no de una función. De forma natural, se dice que f está **acotada** en $A\subset\mathbf{R}$ si lo está el conjunto $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ y se define **valor máximo** de f en A como el máximo del conjunto $f(A)$ (en caso de que exista). Análogamente se define **valor mínimo** de f en A .

Ej. La función del dibujo (que sí es acotada) no tiene valor máximo en $[a,b]$, aunque sí valor mínimo (se alcanza en b y su valor es 0); está claro que no es continua en $[a,b]$.

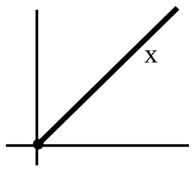


Teorema: $\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow f \text{ acotada en } [a,b]}$

Si f no estuviese acotada superiormente para cada $n\in\mathbf{N}$ podríamos escoger un $x_n\in I\equiv[a,b]$ con $f(x_n)>n$. Como $\{x_n\}$ acotada, existe $\{x_{n_j}\}\to x_o\in I$ (por ser cerrado). Como f es continua en x_o tendríamos $f(x_{n_j})\to f(x_o)$, lo que es imposible pues $\{f(x_{n_j})\}$ no está acotada ($>n_j$) y no puede converger. [Análogamente se vería que está acotada inferiormente].

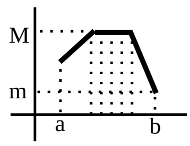


El teorema **no es cierto** para (a,b) ó $[a,\infty)$:
Ej. $f(x)=1/x$ es continua pero no acotada en $(0,1)$
y a $f(x)=x$ le pasa lo mismo en $[0,\infty)$.



Teorema:

$\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow \text{existen los valores máximo y mínimo de } f \text{ en } [a,b]}$



O sea, existen $y, z \in [a,b]$ tales que $f(z) \leq f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in [a,b]$.

[estos y, z no tienen porque ser únicos, desde luego]

Sea M=sup$f(I)$. Existe $\{y_n\} \subset I$ tal que $M - \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M \; \forall n$. Por tanto, $f(y_n) \to M$. Podría $\{y_n\}$ no ser convergente pero, siendo acotada, existirá $\{y_{n_j}\}$ subsucesión convergente hacia un $y \in I$. Como f continua en I, $f(y) = \lim f(y_{n_j}) = M$ y, por tanto, el supremo pertenece a $f(I)$. Análogamente, o considerando $-f$, se ve que el ínfimo también se alcanza.

[En la demostración se ve que el teorema es válido en conjuntos cerrados y acotados (se les llama **compactos** y son importantes en el cálculo más avanzado)].

Tampoco este teorema es cierto sustituyendo $[a,b]$ por (a,b) o por $[a,\infty)$:

Ej. $f(x) = 1/x$ es continua en (0,1) pero no alcanza su máximo ni su mínimo en (0,1).

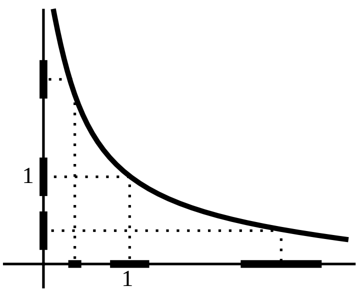
Ej. $f(x) = x$ no tiene máximo en $[0,\infty)$ (su valor mínimo existe y vale 0).

Avanzamos ahora hacia la definición de **función uniformemente continua** en un intervalo I:

f era continua en I si lo era en cada x de I (límites laterales en los posibles extremos de I), es decir, si $\forall x \in I$ y $\forall \varepsilon$ existe un $\delta(\varepsilon, x)$ tal que $\forall y \in I$ si $|y-x| < \delta$ entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Ej. Consideremos $f(x) = \frac{1}{x}$. En (0,1) sabemos que es continua:

$\forall x$ y $\forall \varepsilon$ existe un δ tal que si $|y-x| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| < \varepsilon$



Pero dado un ε se ve que el δ que debemos tomar es más pequeño según consideremos un x más pequeño. Intuitivamente está claro que no podemos encontrar un δ que nos valga para todos los x de (0,1): por pequeño que sea δ, si x es muy pequeño, la función tomará valores muy diferentes en $(x-\delta, x+\delta)$. Para la misma función en $[1,\infty)$, sin embargo, se ve que dado un ε existe un δ que es válido para todos los x del intervalo (el que valga para $x=1$ valdrá para también para los $x > 1$).

Def.

f es **uniformemente continua** en I si $\forall \varepsilon$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que $\forall x, y \in I$ si $\lvert y-x \rvert < \delta$ entonces $\lvert f(y) - f(x) \rvert < \varepsilon$

Evidentemente: $\boxed{f \text{ uniformemente continua en } I \Rightarrow f \text{ continua en } I}$, pero $\Leftarrow$ es falso en general:

Ej. Acabemos de formalizar que $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en (0,1) :

Sea $\varepsilon = 1$. Por pequeño que sea δ encontramos $x, y \in (0,1)$ con $|y-x| < \delta$ pero $|1/y - 1/x| > \varepsilon$.

Por ejemplo, $x = \frac{\delta}{4}$, $y = d$ satisfacen $|y-x| = \frac{3\delta}{4} < \delta$ pero $|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = \frac{3}{\delta} > 1$ (pues $d < 1$)

Formalizamos ahora que $f(x) = 1/x$ sí es uniformemente continua en $[1,\infty)$:

$\forall \varepsilon \; \exists \delta = \varepsilon$ tal que $\forall x, y \in [1,\infty)$ con $|y-x| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = \frac{|y-x|}{xy} \leq |y-x| < \varepsilon$

La implicación hacia la izquierda sí es válida cuando $I = [a,b]$:

Teorema: $\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow f \text{ uniformemente continua en } [a,b]}$

Por reducción al absurdo. Supongamos a la vez f continua y no uniformemente continua en $[a,b]$. Existe, pues, $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ podemos encontrar x, y con $|y-x| < \delta$ pero $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$. En particular, para cada $\delta = 1/n$ tenemos $\{x_n\}, \{y_n\} \subset [a,b]$ con $|y_n - x_n| < 1/n$ y $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \; \forall n$. $\{x_n\}$ acotada $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}$ convergente a un c ($\in [a,b]$ por ser cerrado) $\Rightarrow f(x_{n_j}) \to f(c)$ (f continua). Como $|y_{n_j} - x_{n_j}| < 1/n_j \to 0$ también $f(y_{n_j}) \to f(c)$y por tanto $|f(y_{n_j}) - f(x_{n_j})| \to 0$, lo que está en clara contradicción con el hecho de que $|f(y_{n_j}) - f(x_{n_j})| \geq \varepsilon \; \forall n_j$.

[en la demostración se ve que también este teorema será válido en cualquier conjunto compacto]