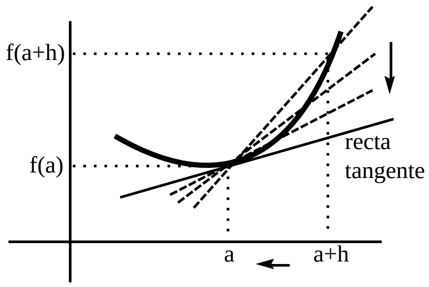
3. Derivadas en R

3.1. Definición y cálculo

Def.

> La función f es **derivable** en a (punto interior al dom$f$) si existe el $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
> En ese caso el límite se representa por $f'(a)$ y se llama **derivada** de f en a .

Dos aplicaciones.



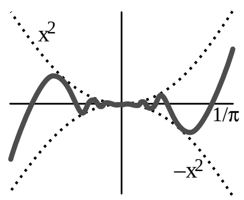
Pendiente de la tangente a una curva: $[f(a+h)-f(a)]/h$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. Cuando $h \to 0$, la secante tiende hacia la recta tangente y su pendiente tiende hacia $f'(a)$. Así pues, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a es (si $f'(a)$ existe, claro): $\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$

Velocidad instantánea: si $d(t)$ es la distancia recorrida por un móvil en el tiempo t, $\frac{d(a+h)-d(a)}{h}$ es su velocidad media en el intervalo $[a, a+h]$ y, por tanto, $d'(a)$ es su velocidad en el instante $t = a$.

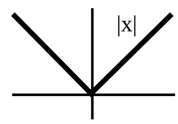
Se llama f' , **función derivada** de f , a la que hace corresponder a cada $x \in$dom$f$ en que f es derivable el valor $f'(x)$; $f''(a)$ será la derivada de $f'(x)$ en el punto a (un número) y f'' la función derivada de f' ;... En general, $f^{(n)}$ es la función derivada de $f^{(n-1)}$ [definida en los $x \in$dom$f^{(n-1)}$ tales que existe $f^{(n)}$].

[Otra notación famosa es la de Leibniz: $f' = \dfrac{df}{dx}$, $f'(a) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=a}$, $f'' = \dfrac{d^2f}{dx^2}$]

Ej. $f(x) = c$ es derivable para todo a y $f'(a) = 0$ ya que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$.



Ej. $g(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $g(0) = 0$. Como existe $g'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}[h \operatorname{sen}\tfrac{1}{h}] = 0$, g es derivable en $x = 0$. Era de esperar que lo fuese, pues las tangentes oscilan, pero acercándose a $y = 0$. Para $x \neq 0$ también va a existir g' ; es difícil verlo con la definición, pero pronto será muy sencillo.



Ej. $h(x) = |x|$. Si $a > 0$, $h'(a) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h} = 1$.

Si $a > 0$, $h'(a) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{-a+h-a}{h} = -1$.

No derivable en $x = 0$ porque $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ no existe. Pero sí existen los límites laterales.

Def. $\boxed{f'(a^+) = \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \;;\; f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (**derivadas por la derecha e izquierda**, respectivamente)

Está claro que f es derivable en a si y sólo si **existen y coinciden** $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Ej. Para $h(x) = |x|$, existen las derivadas laterales en 0 pero no coinciden: $h'(0^+) = 1$, $h'(0^+) = -1$.

Teorema: $\boxed{f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0^+}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h = f'(a)\cdot 0 = 0 \Rightarrow f$ continua en a .

Hay funciones continuas no derivables (el valor absoluto, por ejemplo; tienen 'picos').

Con el siguiente teorema podremos calcular casi todas las derivadas acudir a la definición:

Teorema:

Si f y g son derivables en a entonces $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ son derivables en a y se tiene:
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$; $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$; $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
Si además $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en a y es

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} \; ; \; \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2} \; .$$

g derivable en a y f derivable en $g(a) \Rightarrow f \circ g$ derivable en a y $(f \circ g)' = f'[g(a)] \cdot g'(a)$
[**regla de la cadena**].

f derivable en $f^{-1}(b)$ y $f'[f^{-1}(b)] \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ derivable en b y $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f[f^{-1}(b)]}$.

$c \cdot f$ es caso particular de $f \cdot g$; de $c \cdot f$ y de la suma se deduce la de $f - g = f + (-1) \cdot g$.

Las demás:

$\boxed{f+g}$ $\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a) + g'(a)$.

$\boxed{f \cdot g}$ $\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} = f(a+h)\, \frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\, \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (puesto que f es continua en a por ser derivable)

$\boxed{1/g}$ $\frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a)g(a+h)} \longrightarrow -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$ si $h \to 0$
(g continua en a, $g(a) \neq 0 \Rightarrow g(a+h) \neq 0$ si h pequeño)

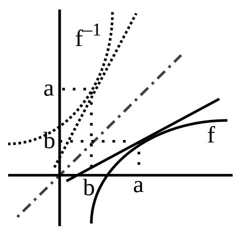
$\boxed{f/g}$ $\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\, \frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\, f(a)$

$\boxed{f \circ g}$ $\frac{f[g(a+h)]-f[g(a)]}{h} = \frac{f[g(a)+g(a+h)-g(a)]-f[g(a)]}{g(a+h)-g(a)} \cdot \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'[g(a)] \cdot g'(a)$,
ya que $k = g(a+h) - g(a) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ por ser g continua.

[Esta demostración necesita correcciones (ver Spivak), pues $g(a+h) - g(a)$ podría hacerse 0 infinitas veces para valores muy pequeños de h]

$\boxed{f^{-1}}$ Sea $b = f(a)$; por ser $f'(a) \neq 0$ la f es inyectiva (y existe f^{-1}) en un entorno de a; por tanto, para cada h pequeño hay un único k tal que $f(a+k) = b + h$. Por lo anterior:

$$\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h} = \frac{f^{-1}(f(a+k))-a}{b+h-b} = \frac{k}{f(a+k)-f(a)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)}$$



Las dos últimas reglas de derivación adoptan una forma sugerente, pero imprecisa, con la notación de Leibniz:

$$\text{Si } z = g(y)\,,\ y = f(x): \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad , \quad \text{si } \frac{dx}{dy} \neq 0$$

(pero no dejan claro que las diferentes derivadas están evaluadas en puntos diferentes).

Derivadas de las funciones elementales:

$\boxed{[x^b]' = bx^{b-1}}$ para todo b real, $x>0$. Podemos ya demostrarlo si $b \in \mathbf{Q}$. Varios pasos:

Si $b=n\in\mathbf{N}$ [la fórmula es válida entonces $\forall x$], por inducción:

Cierto para $n=1$: $1=[x^1]'=1x^{1-1}=1$. Supuesto cierto para $n-1$:

$[x^n]'=[x\cdot x^{n-1}]'=x^{n-1}+x(n-1)x^{n-2}=nx^n$, cierto para n .

Si $b=0$ está visto. Si $b=-n$, $n\in\mathbf{N}$, $[\frac{1}{x^n}]'=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$ [válido $\forall x\neq 0$].

Si $b=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbf{Z}$, $x^{1/n}$ es la inversa de x^n y por tanto $[x^{1/n}]'=\frac{1}{n[x^{1/n}]^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{(1-n)/n}$.

Si $b=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{Z}$, $[(x^{1/n})^m]'=m(x^{1/n})^{m-1}\frac{1}{n}x^{(1-n)/n}=\frac{m}{n}x^{(m-n)/n}$.

$\boxed{[\log|x|]'=\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$: Si $x>0$, $[\log x]'=\frac{d}{dx}\int_1^x\frac{dt}{t}=\frac{1}{x}$, por teoremas de integrales.

Si $x<0$, $[\log(-x)]'=\frac{-1}{-x}$.

$$\boxed{[\mathrm{e}^x]'=\mathrm{e}^x\ ,\ \forall x\quad ;\quad [b^x]'=b^x\log b\ ,\ \forall x, b>0\quad ;\quad [\log_b x]'=\frac{1}{x\log b}\ ,\ x>0, b>0, b\neq 1}$$

e^x inversa de $\log x \Rightarrow [\mathrm{e}^x]'=\frac{1}{1/\mathrm{e}^x}$; $[\mathrm{e}^{x\log b}]'=\mathrm{e}^{x\log b}\log b$; $[\frac{\log x}{\log b}]'=\frac{1}{x\log b}$.

Además se deduce: $[x^b]'=[\mathrm{e}^{b\log x}]'=\frac{b}{x}\mathrm{e}^{b\log x}=bx^{b-1}$ para cualquier b real.

$$\boxed{[\operatorname{sh}x]'=\operatorname{ch}x\ ,\ [\operatorname{ch}x]'=\operatorname{sh}x\ ,\ [\operatorname{th}x]'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=1-\operatorname{th}^2x\ ,\ \forall x}$$

Las primeras triviales. Entonces $[\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}]'=\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}$ y sabemos que $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$.

$$\boxed{[\operatorname{sen}x]'=\cos x\ ,\ [\cos x]'=-\operatorname{sh}x\ ,\ \forall x\ ;\quad [\tan x]'=\frac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x\ ,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$$

$\frac{1}{h}[\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x]=\frac{2}{h}\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})\to\cos x$;

$[\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})]'=\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\operatorname{sen}x$; $\left[\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right]'=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}$.

$$\boxed{[\operatorname{arc\,sen}x]'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ [\operatorname{arc\,cos}x]'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \forall x\in(-1,1)\ ;\quad [\arctan x]'=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ \forall x}$$

$[\operatorname{arc\,sen}x]'=\frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}x)}}$; $[\operatorname{arc\,cos}x]'=\frac{-1}{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos}x)}$;

$[\arctan x]'=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$.

Def. Se dice que f es **derivable** en un intervalo abierto I [finito o infinito] si es derivable en todos los puntos del intervalo; f es **de clase 1** en I [$f\in C^1(I)$] si además f' es continua en I . Diremos que $f\in C^n(I)$ [**de clase** n] si f posee n derivadas en I y $f^{(n)}$ es continua en I , y que $f\in C^\infty(I)$ [**de clase infinito**] si existen derivadas de cualquier orden de f en I .

[Para intervalos cerrados, como siempre, hay que preocuparse de los extremos:
f es derivable en $[a,b]$ si lo es en (a,b) y existen $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$;
$f\in C^1[a,b]$ si $f\in C^1(a,b)$, $f'(x)\to f'(a^+)$ si $x\to a^+$ y $f'(x)\to f'(b^-)$ si $x\to b^-$].

Todas las funciones elementales de 2.1 son de C^∞ en su dominio, con excepción de $\operatorname{arc\,sen}x$ y $\operatorname{arc\,cos}x$ [que no tienen siquiera derivada primera en $x=\pm1$], y x^b con $b>0$ y b no entero [para la que $f^{(n)}$ no existe en $x=0$ cuando el exponente de $f^{(n-1)}$ pasa a estar entre 0 y 1; por ejemplo: $f(x)=x^{7/3}$, $f'(x)=\frac{7}{3}x^{4/3}$, $f''(x)=\frac{28}{9}x^{1/3}\ \forall x$, pero $f'''(0)$ ya no existe].

Ya es fácil hallar la derivada de cualquier función, salvo en casos excepcionales:

Ej. Para la $g(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $g(0)=0$ de antes g' existe $\forall x$; si $x\neq 0$ (producto de composiciones de derivables), $g'(x)=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ (además $g'(0)=0$ que sólo salía de la definición porque un denominador se anula). g' no es continua en 0 porque g' no tiene límite: si $x\to 0$, $2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\to 0$ pero $\cos\frac{1}{x}$ no tiende a nada [por ejemplo, porque las sucesiones $\{a_n\}=\frac{1}{2n\pi}$ y $\{b_n\}=\frac{1}{(2n-1)\pi}$ tienden a 0 pero $f(a_n)=1$ y $f(b_n)=-1$]. Por tanto, a pesar de ser g derivable en todo $\mathbf{R}$, no es de $C^1(\mathbf{R})$ [sí lo es en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$]. Como g' no es continua en 0 , no puede existir $g''(0)$. Para cualquier $x\neq 0$ sí existen derivadas de todos los órdenes: $g''(x)=[2-\frac{1}{x^2}]\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}$, $g'''(x)$, ... [es decir, es de C^∞ en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$].

Ej. $k(x)=\left[\frac{\log[7+\operatorname{ch}^2(3^x+x)]}{5+\arctan(x-2)}\right]^{1/3}$ es derivable $\forall x$,

pues es suma, producto, composición,... de funciones derivables (el logaritmo se evalúa en valores mayores que 7 , el denominador es mayor que 0 y el corchete gordo no se anula). Sabemos calcular su derivada a pesar de su aspecto tan complicado (no con la definición, desde luego):

$$k'(x)=\frac{1}{3}\frac{\frac{2\operatorname{ch}(3^x+x)\operatorname{sh}(3^x+x)(3^x\log 3+1)}{7+\operatorname{ch}^2(3^x+x)}[5+\arctan(x-2)]-\frac{\log[7+\operatorname{ch}^2(3^x+x)]}{1+(x-2)^2}}{[5+\arctan(x-2)]^2}\left[\frac{\log[7+\operatorname{ch}^2(3^x+x)]}{5+\arctan(x-2)}\right]^{-2/3}$$

Ej. $m(x)=x|x-x^2|$ es continua $\forall x$ por ser producto de composiciones de continuas $\forall x$ [$|x|$ lo es].

Sólo puede ser no derivable cuando se anule el valor absoluto. Para precisarlo, hay que discutir:

$$m(x)=\begin{cases} x^2-x^3 \text{ si } x\in[0,1] \\ x^3-x^2 \text{ si } x\notin(0,1)\end{cases};\ m'(x)=\begin{cases} 2x-3x^2 \text{ si } x\in(0,1) \\ 3x^2-2x \text{ si } x\notin[0,1]\end{cases};\ m''(x)=\begin{cases} 2-6x \text{ si } x\in(0,1) \\ 6x-2 \text{ si } x\notin[0,1]\end{cases}$$

Utilizando las expresiones del intervalo adecuado deducimos que:

$m'(0^-)=0=m'(0^+)$, m derivable en $x=0$; $m'(1^-)=-1\neq 1=m'(0^+)$, m no derivable en $x=1$.
$m''(0^-)=-2\neq 2=m''(0^+)$, m'' no existe si $x=0$; tampoco existe si $x=1$ por ser m' discontinua.

Ej. $n(x)=\arctan\frac{1}{x^2}$, $n(0)=\frac{\pi}{2}$. Si $x\neq 0$ es fácil hallar $n'(x)=\frac{-2x}{1+x^4}$, $n''(x)=2\frac{3x^4-1}{(1+x^4)^2}$, ...

$n'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\arctan\frac{1}{h^2}-\frac{\pi}{2}]$ es un límite indeterminado que aún no sabemos hacer.

Está claro que $n'(x)\underset{h\to 0}{\to}0$, pero de ahí no podemos deducir (todavía) que $n'(0)=0$ (pues nadie nos garantiza que n' sea continua; al final de 3.2 veremos un teorema que nos permitirá dar ese paso). Admitiendo que $n'(0)=0$, n es de $C^\infty(\mathbf{R})$, pues existen n', n'', n''' ,... (denominadores no nulos).

Ej. $p(x)=x^x=\mathrm{e}^{x\log x}$ ($=[\mathrm{e}^{\log x}]^x$; recordamos que se define $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\log[f(x)]}$).

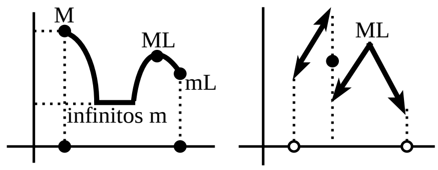
Así pues, $p'(x)=\mathrm{e}^{x\log x}[\log x+1]$; $p''(x)=\mathrm{e}^{x\log x}([\log x+1]^2+\frac{1}{x})$; ...

3.2. Teoremas sobre funciones derivables

Los primeros resultados están destinados a determinar los x de un conjunto $A \subset \mathrm{dom} f$ en los que una función f alcanza sus **valores máximo y mínimo** (a ambos se les llama **valores extremos** de A). Sabemos que si A es un intervalo cerrado y f es continua existen los valores extremos de f en A (es decir, existen $y, z \in A$ tales que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ para todo $x \in A$), aunque podría no haberlos si A es otro tipo de conjuntos o si f no es continua. En ocasiones se llama a estos valores máximo y mínimo **absolutos**, para distinguirlos de los **locales o relativos**:

Def. f posee un **máximo** [**mínimo**] **local** en x sobre un conjunto $A \subset \mathrm{dom} f$ si existe un $\delta > 0$ tal que el valor máximo [mínimo] de f en $A \cap B(x, \delta)$ se alcanza en x ; es decir, si $f(x) \geq f(x+h)$ [$f(x) \leq f(x+h)$] $\forall h$ tal que $|h| < \delta$ y $x+h \in A$.

Está claro que si un valor extremo (absoluto) de f en A se alcanza en un punto x también tiene f en ese x un extremo local y que lo contrario no es cierto. Los máximos y mínimos (absolutos y locales) pueden ser infinitos o no existir, pueden darse en el borde o en el interior de A . En este último caso:



Teorema:

$\boxed{\text{Si } f \text{ posee un extremo local en } x \text{ interior a } A \text{ y } f \text{ es derivable en } x \Rightarrow f'(x) = 0}$

Si ML en $x \Rightarrow \exists \delta$ tal que si $0 < h < \delta$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$, y si $-\delta < h < 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0 \ .$$

Si mL en $x \Rightarrow -f$, derivable, tiene ML en $x \Rightarrow -f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

Hay x con $f'(x) = 0$ en los que f **no tiene extremo local** (por ejemplo $f(x) = x^3$ en $x = 0$). **Tampoco es cierto que deba cumplirse** $f'(x) = 0$ en todo x en el que f posea un extremo local (pues x podría no ser interior o f no ser derivable en x). De lo anterior se sigue que:

Para buscar los valores máximo y mínimo de una f en un intervalo $[a, b]$ hay que considerar:
• los extremos a y b • los $x \in (a, b)$ en los que $f'(x) = 0$ • los x en los que no exista $f'(x)$

Comparando los valores de f en cada uno de esos puntos se hallan entonces los extremos (si existen; si la función es discontinua o el intervalo, por ejemplo, no es de longitud finita las cosas se pueden complicar).

Ej. Hallemos los valores máximo y mínimo de $f(x) = \log(1+x^2) - |x-2|$ en el intervalo $[-2, 3]$.

Tales valores han de existir por ser f continua en el intervalo. f sólo no es derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) - x + 2 \ , \ x \geq 2 \\ \log(1+x^2) + x - 2 \ , \ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -(1-x)^2/(1+x^2) \ , \ x > 2 \\ (1-x)^2/(1+x^2) \ , \ x < 2 \end{cases}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Basta comparar los valores en los 4 puntos candidatos:

$$f(-2) = \log 5 - 4 \ , \ f(-1) = \log 2 - 3 \ , \ f(2) = \log 5 \ , \ f(3) = \log 10 - 1 \ .$$

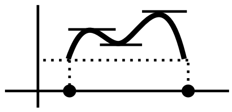
Con una calculadora es fácil hallar estos valores:

$$f(-2) \approx -2.4 \ , \ f(-1) \approx -2.3 \ , \ f(2) \approx 1.6 \ , \ f(3) \approx 1.3 \ .$$

El máximo se da en $x = 2$ y él mínimo en $x = -2$. Sin calculadora también podríamos decirlo. Es claro que $f(-2)$ y $f(-1)$ son negativos [$\log 2 < 1$ pues $2 < e$ y $\log 5 < 2$ pues $5 < (\frac{5}{2})^2 < e^2$]. Y también es claro que $f(2)$ es el mayor de los dos positivos: $\log 5 > \log 5 + \log 2 - 1$ [$\log 2 < 1$]. Además: $\log 5 - 4 < \log 2 - 3 \Leftrightarrow \log 5 - \log 2 = \log \frac{5}{2} < 1$ y esto es cierto porque $\frac{5}{2} < e$.

Teorema de Rolle:

Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ con $f'(c)=0$

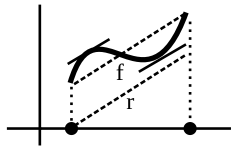


f tiene máximo y mínimo en $[a,b]$ por ser continua. Si alguno de los dos lo toma en (a,b) ya estaría. Si f toma su máximo y su mínimo en a y $b \Rightarrow f$ es constante $\Rightarrow f'(x)=0$ para cualquier x de (a,b) .

Teorema del valor medio:

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(existe al menos un c para el que la tangente es paralela a la recta que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$; o bien, existe un instante c en el que la velocidad instantánea coincide con la media en el intervalo)



Sea $h(x)=f(x)-r(x)$, con $r(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, continua $[a,b]$, derivable (a,b) y $h(a)=f(a)=h(b) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b)$ tal que $h'(c)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

Crecimiento y decrecimiento:

Teorema: Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) . Entonces:
si $f'(x)>0$ para todo x de (a,b), f es estrictamente creciente en $[a,b]$,
si $f'(x)<0$ para todo x de (a,b), f es estrictamente decreciente en $[a,b]$,
si $f'(x)=0$ para todo x de (a,b), f es constante en $[a,b]$.

Sea $[x,y] \subset [a,b]$. Por el teorema del valor medio $\exists c \in (x,y)$ con $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Por tanto, si $f'(c) \; >, <, = 0 \Rightarrow f(y) \; >, <, = f(x)$, respectivamente.

Se ve en la demostración que podemos sustituir en hipótesis y conclusiones '$[a,$' por '$(-\infty,$' y '$,b]$' por '$,\infty)$'. Observemos que a f' se le piden cosas sólo en el abierto, pero el resultado se tiene en todo el cerrado. Como $f \in C^1[a,b] \Rightarrow f$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), se podría pedir sólo a las f de los teoremas que fuesen de C^1. Pero pediríamos demasiado, y dejaríamos fuera funciones como $f(x)=x^{1/2}$, que no es $C^1[0,1]$ pero sí es continua en [0,1] y derivable en (0,1) (y por tanto sí se le puede aplicar, por ejemplo, el teorema del valor medio).

Ej. Estudiemos en qué intervalos crece y decrece la función $g(x)=\frac{x^3-6x^2-8}{x}$, continua si $\neq 0$.
Como $g'(x)=$ [mejor la calculamos así] $=2x-6+\frac{8}{x^2}=2\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=2\frac{[x+1][x-2]^2}{x^2}$,
entonces $g'>0$ si $x\in(-1,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$ y $g'<0$ si $x\in(-\infty,-1)$. Del teorema deducimos que g decrece en $(-\infty,-1]$ y que crece en $[-1,0)$ y en $(0,\infty)$ [$x=2$ incluido; pero no crece en todo $[-1,\infty)$ (en 0 es discontinua)]. Por tanto, tiene un mínimo local en $x=-1$ y no tiene ni máximo ni mínimo en $x=2$ (a pesar de que $g'=0$).

Teorema (condición suficiente de extremo):

Sea f de C^2 en un entorno de c y sea $f'(c)=0$. Entonces: si $f''(c)>0$, f posee un mínimo local en c , y si $f''(c)<0$, f posee un máximo local en c .

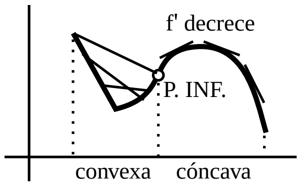
(si $f''(c)=0$ podría haber en c un máximo, un mínimo o ninguna de las dos cosas)

$f''(c)=\lim_{x\to 0}\frac{f(c+h)-0}{h}>0 \Rightarrow$ para h pequeño $f'(c+h)$ y h tienen el mismo signo $\Rightarrow f$ decrece en un intervalo a la izquierda ($h<0$) y crece en uno a la derecha ($h>0$). [Igual la otra].

Ej. Para la g de arriba $g''(x)=2-\frac{16}{x^3} \Rightarrow g''(-1)=18$ (mínimo, como ya sabíamos sin hallar g''),
$g''(2)=0$ (?? , pero la g' nos dijo que ni máximo ni mínimo).

Concavidad y convexidad:

Def. f es **convexa hacia abajo** en un intervalo I si $\forall x, y \in I$ el segmento que une $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de f . f es **cóncava** si $-f$ es convexa. Se llama **punto de inflexión** a un punto de la gráfica en la que ésta pasa de convexa a cóncava o viceversa.



[Hay libros que llaman cóncava a lo que nosotros llamamos convexa y viceversa; otros, dicen que se dobla hacia arriba ($\cup$), o hacia abajo ($\cap$)].

Teorema: Sea f continua en $[a,b]$ y derivable dos veces en (a,b) . Si $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) en (a,b) , f es convexa (cóncava) en $[a,b]$. Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f , debe ser $f''(c) = 0$.

[no lo demostramos; geométricamente está claro: f es $\cup$ si la pendiente de la tangente va creciendo (y si $f'' \geq 0$, la f' crece); es $\cap$ si decrece; en un punto de inflexión hay un máximo o mínimo de la f' (pasa de crecer a decrecer o al revés); puede ocurrir que $f''(c) = 0$ y que en $(c, f(c))$ no haya punto de inflexión como ocurre con $f(x) = x^4$ en $x = 0$]

Ej. Para la g era $g''(x) = \frac{2[x^3-8]}{x^3}$, negativa en $(0,2)$ y positiva en el resto.

Por lo tanto es convexa en $(-\infty, 0)$ y $[2, \infty)$ y cóncava en $(0,2]$. $x = 2$ es punto de inflexión.

Teorema: Si f es continua en a y f' tiene límite cuando $x \to a \Rightarrow f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$

El teorema del valor medio en $[a, a+h] \Rightarrow \exists x_h \in (a, a+h)$ tal que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(x_h)$.

Si $h \to 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$ y $x_h \to a$.

[Se ve en la demostración que si $f'(x) \to \infty$ ó $-\infty$ la $f'(a)$ no existe (la recta tangente se pone vertical, pues su pendiente tiende a infinito), pero recordemos que puede no existir el límite de f' y ser la f derivable en a (que hay funciones derivables que no son C^1); este teorema prueba que la función n de la sección anterior es derivable en $x = 0$ y que $n'(0) = 0$].

Acabamos la sección citando una generalización del teorema del valor medio que vamos a utilizar dos veces en el curso (demostrando cosas en el capítulo 4):

Teorema del valor medio de Cauchy

Sean f y g continuas en $[a,b]$, derivables en $(a,b) \Rightarrow$ $\exists c \in (a,b)$ tal que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$

(para $f(x) = x$ se recupera el teorema del valor medio)

(se demuestra aplicando Rolle a $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$)

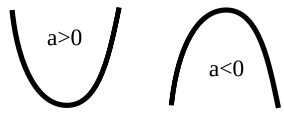
3.3. Polinomios

Un tipo de funciones que nos aparecen continuamente son los polinomios. Más adelante aproximaremos cualquier función más complicada mediante polinomios de coeficientes reales. Repasamos brevemente varias de sus propiedades.

Un polinomio de grado n es: $\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$, $a_k \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.

El polinomio más sencillo (cuya gráfica no sea una recta) es el de segundo grado:

$\boxed{P_2(x) = ax^2 + bx + c} = a[x + \frac{b}{2a}]^2 - \frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $a \neq 0$



(a Δ se le llama discriminante de P_2). Su gráfica es (ver 3.5) la de la parábola $y = x^2$ trasladada a izquierda o derecha, multiplicada por una constante (positiva o negativa) y trasladada hacia arriba o abajo. Es claro que su extremo se alcanza en $x = -\frac{b}{2a}$ (o a partir de $P_2'(x) = 2ax + b$). Sus raíces vienen dadas por: $x = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{\Delta}]$. El tipo de raíces de $P_2(x)$ depende del signo de Δ . Si $\Delta > 0$ tiene dos reales y distintas, si $\Delta = 0$ tiene una raíz doble real y si $\Delta < 0$, dos raíces complejas conjugadas $(p \pm qi)$. Observemos que la raíz doble $-\frac{b}{2a}$ también es raíz de $P_2'(x)$. Conocidas sus raíces x_1 y x_2 puede escribirse $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

P_2 puede tener o no raíces reales. Lo mismo sucede con cualquiera de grado par. Sin embargo:

$\boxed{\text{Un polinomio de grado impar posee por lo menos una raíz real.}}$

En efecto, $P_n(x) = a_n x^n[1 + \cdots + a_0 x^{-n}]$ y supongamos que $a_n > 0$. Entonces, si n es impar, $P_n(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $P_n(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Existen por tanto a con $P_n(a) < 0$ y b con $P_n(b) > 0$. Por Bolzano, existe $c \in (a, b)$ con $P_n(c) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra:

$\boxed{\text{Todo polinomio de grado } n \text{ posee } n \text{ raíces}}$ (reales o complejas, repetidas o no).

Si $x_1, ..., x_n$ son esas raíces, se puede escribir, en principio: $P_n(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Es muy fácil ver que si un polinomio de coeficientes reales tiene la raíz compleja $p + qi$ entonces también tiene la raíz $p - qi$. Cada pareja de productos $(x - [p + qi])(x - [p - qi])$ en la descomposición de $P_n(x)$ da entonces lugar a un polinomio de segundo orden con coeficientes reales $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$. Así pues, siempre se puede escribir:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_r)(x^2 + b_1 x + c_1)\cdots(x^2 + b_s x + c_s) \text{ , con } r + 2s = n \text{ , } x_k, b_k, c_k \in \mathbf{R}$$

Algunas de estas raíces podrían estar repetidas. No es difícil ver que si $x = x_k$ es raíz simple de P_n entonces no anula la derivada P_n' y que sí la anula si es raíz múltiple. Por tanto:

$\boxed{\text{Una raíz de un polinomio es múltiple si y sólo si es raíz también de su derivada.}}$

Y, por tanto, una raíz múltiple es raíz del máximo común divisor de P_n y P_n' . Una forma de calcularlo es mediante el algoritmo de Euclides: dados P , Q [con $gr(P) \geq gr(Q)$] , se divide P entre Q y se llama R_1 al resto obtenido (si conviene, multiplicado por una constante); a continuación se divide Q entre R_1 y se llama R_2 al nuevo resto; luego R_1 entre R_2 ... hasta obtener un resto nulo. Entonces el mcd(P, Q) es el último resto no nulo del proceso anterior.

Ej. Para $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ [$P' = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4$] se obtiene:
$R_1 = x^2 + 3x + 2$, $R_2 = x + 1$, $R_3 = 0$. Por tanto, mcd$(P, P') = x + 1 \Rightarrow$
P tiene $x = -1$ como raíz doble [dividiendo por $(x + 1)^2$, $P = (x + 1)^2(x^2 + 2)$].

En las pocas ocasiones en que un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces enteras, son muy fáciles de encontrar:

$\boxed{\text{Si existe raíz entera de } P_n(x) \text{ se encuentra entre los divisores del término independiente } a_0 \,.}$

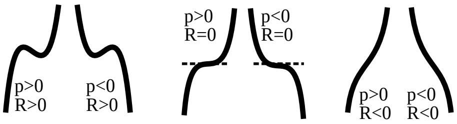
Ya que si c es raíz entera, entonces $a_0 = -c[a_n c^{n-1} + ... + a_1]$, con lo que a_0 es múltiplo de c .

Ej. $P^*(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 6$ no tiene raíces enteras, pues no lo son $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ ni 6 .

Nos gustaría que existiesen fórmulas para el cálculo de las raíces de los P_n de cualquier grado similares a las de los de grado 2. De hecho, hacia 1500 se descubrieron fórmulas para las raíces de los de grado 3 y 4 (pronto veremos, sin demostración, las del polinomio cúbico). Pero en el siglo XIX se probó que es imposible expresar mediante radicales las raíces de los polinomios de grado mayor que 5. Si de alguna forma podemos encontrar una raíz x_k de un polinomio, dividiéndolo por $(x-x_k)$ reducimos el problema de hallar sus raíces al de hallar las de otro de grado menor. Por este camino es posible, en contadas ocasiones, calcularlas todas.

Tratemos ahora un caso en que sí se tienen fórmulas (complicadas) para las raíces:

$\boxed{P_3(x) = px^3 + qx^2 + rx + s}$, $p \neq 0$.



Veamos las diferentes formas que puede tener su gráfica. Como $P_3'(x) = 3px^2 + 2qx + r$ puede tener 2 raíces reales, 1 doble o ninguna real (dependiendo de que $R \equiv q^2 - 3pr$ sea $>, =$ ó < 0), P_3 puede tener un máximo y un mínimo, un punto de inflexión con tangente horizontal o tener la derivada con signo constante. Si P_3 tiene una raíz x múltiple debe ser $px^3 + qx^2 + rx + s = 3px^2 + 2qx + r = 0$. Eliminando la x entre las dos ecuaciones se obtiene la expresión de su discriminante $\Delta = q^2r^2 - 4pr^3 - 4q^3s + 18pqrs - 27p^2s^2$. Este Δ se puede escribir de forma más compacta si llamamos $S \equiv 27p^2s - 9pqr + 2q^3$, pues entonces se tiene que: $\Delta = \frac{1}{27p^2}[4R^3 - S^2]$. Se puede probar que:

Si $\Delta = 0$, hay una raíz doble de P_3 dada por $x_d = \frac{1}{3p}[-q + \sqrt[3]{\frac{S}{2}}\,]$ y otra simple $x_s = \frac{1}{3p}[-q - 2\sqrt[3]{\frac{S}{2}}\,]$.

Si $\Delta < 0$, existe una única raíz real: $x_r = -\frac{q}{3p} + \frac{1}{3p}\,[\frac{-S+\sqrt{S^2-4R^3}}{2}\,]^{1/3} + \frac{1}{3p}\,[\frac{-S-\sqrt{S^2-4R^3}}{2}\,]^{1/3}$.

Por último, si $\Delta > 0$ $(\Rightarrow R > 0)$, hay tres raíces reales distintas de P_3 que se pueden expresar:

$$x_{1,2,3} = -\frac{q}{3p} + \frac{2\sqrt{R}}{3p}\cos\frac{\phi+2k\pi}{3},\; k = 0,1,2 \text{ , siendo } \phi = \arccos\left(\frac{-S}{2R^{3/2}}\right) .$$

Ej. Para el polinomio de antes $P^*(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 6$ sin raíces enteras se tiene que:

$R = 73$, $S = 430$, $\Delta = 12696 \to \phi =$1.9227264 , $x_{1,2,3} =$ 2.449489, -2.449489, 0.500000

[los errores de redondeo de los cálculos aconsejan acudir a métodos numéricos incluso para los P_3]

[Fórmulas similares, pero aún más complicadas, se podrían dar para los polinomios de cuarto grado. Aquí nos limitamos a recordar que las raíces del sencillo polinomio $ax^4 + bx^2 + c$ se hallan fácilmente tras hacer $t = x^2$. En problemas veremos como hallar las de $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$].

Como en la mayoría de los casos no se pueden hallar las raíces exactas de un $P_n(x)$, habrá que acudir a métodos numéricos como los que veremos en 3.4 para calcularlas aproximadamente. Para aplicar estos métodos será importante primero saber cuántas raíces reales hay y más o menos donde están. Comenzamos acotándolas:

$\boxed{\text{Si } c \text{ es raíz real de } P_n(x) \text{ , entonces } |c| \leq \text{máx}\Big\{1, \frac{1}{|a_n|}[\,|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|\,]\Big\}}$

Pues $|c| = \frac{1}{|a_n|}[\,|a_0||c|^{1-n} + |a_1||c|^{2-n} + \cdots + |a_{n-1}|\,]$.

Si $|c| \geq 1$, $|c| \leq \frac{1}{|a_n|}[\,|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|\,]$, y si $|c| \leq 1$ está claro.

Ej. Las raíces c del $P^*(x)$ de antes debían cumplir $|c| < 9.5$ (mala cota, pero algo es algo)].

Nuestro objetivo es **separar** las raíces de un P, es decir, **conocer el número exacto de raíces reales y localizar intervalos** $[a,b]$ **en los que sólo se encuentre una de ellas**. El teorema de Bolzano da información, pero no basta: si encontramos un $[a,b]$ con $P(a)\cdot P(b)<0$, hay al menos una raíz en (a,b) (pero podría haber más de una e incluso podría haber raíces en intervalos con $P(a)\cdot P(b)>0$). El siguiente resultado es fácil de aplicar pero suele dejar también bastantes dudas:

Ley de Descartes de los signos.

Sea P un polinomio de grado n con término independiente no nulo. Si r es el número de raíces reales positivas de P y s el número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes, es $r\leq s$ y $s-r$ es un número par (o cero).

[Cambiando x por $-x$ se obtiene el resultado análogo para las raíces negativas].
[Se tiene en cuenta la multiplicidad (una raíz doble cuenta por dos)]

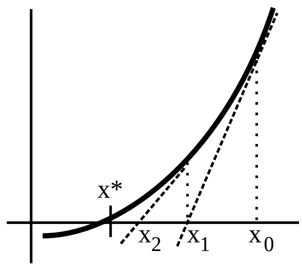
Ej. Para P^* sus coeficientes $2,-1,-12,6$ $(+--+)$ presentan $s=2$ cambios de signo. Esto significa, en principio, que tiene ó 2 ó 0 raíces positivas. Cambiando x por $-x$ obtenemos $-2x^3-x^2+12x+6$ $(--++)$; como $s=1$, seguro que hay una única negativa. Calculando el Δ , sabemos que hay 3 reales y con ello aseguramos que hay 2 positivas.

Ej. Para $P_4(x)=9x^4+8x^3+28x^2+24x+3$ podemos afirmar que no tiene raíces positivas ($s=0$) y como tras hacer x por $-x$ se tiene $1,-8,28,-24,3$ podrían existir 4 , 2 ó 0 raíces negativas.

Demostramos Descartes (en el caso más simple: $a_k\neq 0\ \forall k$): Podemos suponer $a_n>0$. Inducción sobre n . Es cierto para $n=1$: $a_1x+a_0=0$ tiene una raíz positiva ($r=1$) si a_1 y a_0 tienen signos opuestos ($s=1$); y $r=0$ si $s=0$. Supongámoslo cierto para polinomios de orden $n-1$ y demostrémoslo para los de n : Sean s' y r' los números de cambios y raíces para P' . Si $\mathrm{sg}(a_1)=\mathrm{sg}(a_0)$, es $s=s'$, y como (fácil de ver) $(-1)^r$ y $(-1)^{r'}$ son los signos de sus términos independientes, r y r' tienen la misma paridad; si $\mathrm{sg}(a_1)\neq\mathrm{sg}(a_0)$, $s=s'+1$ y r es de paridad opuesta a r' ; en ambos casos, $s-r$ y $s'-r'$ tienen la misma paridad; como para P' (de orden $n-1$) estamos suponiendo cierto Descartes, deducimos que $s-r$ es par. No es difícil deducir de Rolle, además, que $r'\geq r$ ó $r'\geq r-1$, respectivamente, en los casos de antes; de ahí se obtiene que en ambos casos es $s-r\geq s'-r'$, número que estamos suponiendo positivo.

3.4. Ceros de funciones

Muchas veces es necesario determinar los **ceros** de una función f , es decir, los x^* tales que $f(x^*) = 0$. Pero, como vimos, ni siquiera si f es un polinomio se tienen siempre fórmulas para calcular sus raíces. Mucho menos si f es una función trascendente como $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3$. Se tratará entonces de hallar los ceros de forma aproximada. El teorema de Bolzano puede ser un camino para aproximar x^* : encontrando un intervalo $[a, b]$ de pequeña longitud tal que $f(a)f(b) < 0$ estamos seguros de que al menos hay un $x^* \in (a, b)$ con $f(x^*) = 0$ (que será el único si f' es $>$ ó $<$ que 0 en ese intervalillo). Pero mucho más rápidos serán, normalmente, otros caminos como el



Método de Newton.

La idea de este método es simple. Supongamos que para una f como la de la figura sabemos que el cero x^* se parece más o menos a x_0 . Aproximando la gráfica con la tangente en $(x_0, f(x_0))$ obtenemos un x_1 (punto en que la recta corta el eje), probablemente más cercano a x^* que el x_0 inicial. Repitiendo el proceso con x_1 obtenemos un x_2 , luego un x_3 , ... siendo esperable que la sucesión $\{x_n\}$ converja rápidamente hacia x^* .

Hallemos una fórmula que nos expresará cada término de esta sucesión en función del anterior. Como la tangente en $(x_n, f(x_n))$ es $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ el corte de esta recta con $y = 0$ nos da la siguiente aproximación. Por tanto:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

[Se ve que las cosas irán mal si f/f' es grande cerca de x^* ; se puede demostrar que $\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$ en un entorno de x^* es una condición suficiente para que converja el método].

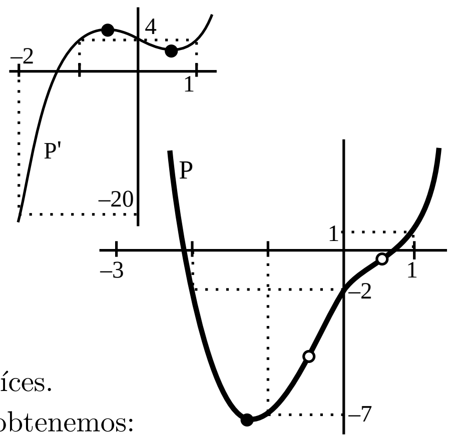
Ej. Aproximemos las raíces reales de $P(x) = x^4 - 2x^2 + 4x - 2$ (exactamente no sabemos). La ley de Descartes nos asegura que hay ó 3 ó 1 positivas $(+-+-)$ y exactamente 1 negativa $(+---)$. Vamos a intentar hacernos una idea de su gráfica para ver si podemos determinar cuántas raíces positivas tiene y localizar intervalos en los que buscarlas. Para ello empezamos estudiando sus derivadas:

$P'(x) = 4[x^3 - x + 1]$ (sin raíces enteras; 2 ó 0 positivas (no lo sabemos, por ahora) y 1 negativa)

$P''(x) = 4[3x^2 - 1] = 0 \to x = \pm 1/\sqrt{3}$ (puntos de inflexión de P y máximos o mínimos de P')

$P'(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4[1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}] \approx 5.5$; $P'(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4[1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}] \approx 2.5$.

$P'(-3) = -92, P'(-2) = -20, P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 4.$



Con esto ya podemos pintar la gráfica de P' . Vemos que: P' tiene un único cero en $(-2, -1)$ [$P'' > 0$ en $(-2, -1)$] y no tiene más. Por tanto, P tiene un único mínimo entre -2 y -1. A partir de él P crece $\Rightarrow$ sólo hay 1 raíz positiva de P . Para localizar un poco mejor las dos raíces de P :

$P(-3) = 49, P(-2) = -2, P(-1) = -7, P(0) = -2, P(1) = 1$

$\Rightarrow$ Existe un cero de P en $[-3, -2]$ y otro en $[0, 1]$.

Aplicamos ahora el método de Newton para aproximar las raíces.

Primero la de P' : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$. Elegimos $x_0 = 1$ y obtenemos:

$x_1 = -1{,}5$; $x_2 = -1.347826087$; $x_3 = -1.325200399$; $x_4 = -1.324718174$; $x_5 = -1.324717957$; y los posteriores x_n tienen esos mismos 9 decimales [es curioso ver lo que ocurre si elegimos $x_0 = 0$].

Los ceros de P los obtenemos con $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 2x_n^2 + 4x_n - 2}{4[x_n^3 - x_n + 1]}$, obteniendo con los x_0 indicados:

x_0=0, x_1=0.5, x_2=0.675, x_3=0.6764448966, x_4=0.6764442885; $x_5, x_6, \ldots$ con iguales decimales.

$x_0 = -2$, $x_1 = -2.1$, $x_2 = -2.090744197$, $x_3 = -2.090657858$, $x_4 = -2.090657851 = x_5 = x_6 = \cdots$

Ej. Como segundo ejemplo del método de Newton, obtengamos una sucesión de x_n que tienden hacia $\boxed{\sqrt[n]{a}}$. Para ello buscamos los ceros de $x^n - a$. Tenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^n - a}{n x_n^{n-1}} = \boxed{\frac{1}{n}\Big[(n-1)x_n + \frac{a}{x_n^{n-1}}\Big]}$$ (llamado algoritmo de Herón para calcular raíces).

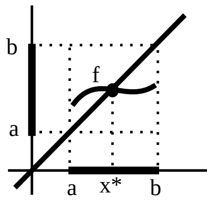
Así, para calcular $\sqrt[3]{12345}$, y partiendo de algún número que no esté muy lejos, por ejemplo $x_0 = 20$:

x_1 =23.62083333 , x_2 =23.12251744 , x_3 =23.11162389 , x_4 =23.11161875 $= x_5 = x_6 = \cdots$

Veamos ahora otro método de aproximación de ceros de un tipo de funciones particulares que, aunque además sea más lento que el de Newton, tiene el interés de que es aplicable en matemáticas más avanzadas a problemas mucho más generales.

$\boxed{f:[a,b]\to[a,b] \text{ es } \textbf{contractiva} \text{ si } |f(x)-f(y)|\le c|x-y| \text{ , con } c<1,\ \forall x,y\in[a,b]}$

Una f contractiva es continua en $[a,b]$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ si $|x-y|<\delta=\frac{\varepsilon}{c}$.



Probemos que entonces $\boxed{\text{existe un único } x^*\in[a,b] \text{ tal que } x^*=f(x^*)}$

(A un x^* con esa propiedad se le llama **punto fijo** de f).

Aplicando Bolzano a $g(x)=x-f(x)$, como $g(a)<0<g(b) \Rightarrow$ existe el x^*.

Si hubiera otro $y^*=f(y^*)$ sería $|f(x^*)-f(y^*)|=|x^*-y^*|\le c|x^*-y^*| \Rightarrow x^*=y^*$.

Además existe una forma muy fácil de aproximar el x^* pues:

$\boxed{\text{Para cualquier } x_0\in[a,b] \text{ , la sucesión } x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))),\ldots\to x^*}$

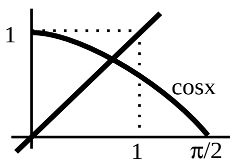
En efecto, llamemos x_n al resultado de aplicar n veces f a x_0 . Vamos a ver que x_n es de Cauchy: se tiene que $|x_n-x_{n+1}|=|f(x_{n-1})-f(x_n)|\le c|x_{n-1}-x_n|\le\cdots\le c^n|x_0-x_1|$; por tanto, si $m\le n$,

$$|x_m-x_n|\le|x_{m+1}-x_m|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\le[c^m+\cdots+c^{n-1}]|x_1-x_0|=\tfrac{c^m-c^n}{1-c}|x_1-x_0|\,,$$

que se puede hacer tan pequeño como queremos tomando m y n suficientemente grandes ($c^m, c^n\to 0$). Como x_n es de Cauchy tiene límite x^* y se cumple $f(x^*)=f(\lim x_n)=\lim f(x_n)=\lim x_{n+1}=x^*$.

La forma más fácil de ver que una $f:[a,b]\to[a,b]$ es contractiva es ver que el máximo M de $|f'(x)|$ en $[a,b]$ es menor que 1, pues, por el teorema del valor medio,

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\le M|x-y| \text{ con } M<1 \ .$$



Ej. Calculemos el único $x\in[0,1]$ tal que $\cos x = x$:

$\cos x$ es contractiva: su imagen está contenida en $[0,1]$ y $|-\operatorname{sen} x|\le \operatorname{sen} 1<1$.

Así pues, podemos hallar el x^* sin más que apretar la tecla del coseno de una calculadora a partir de cualquier $x_0\in[0,1]$. Por ejemplo, si $x_0=1$ vamos obteniendo:

0.54030231, 0.85755322, 0.65428979, 0.79348036, 0.70136877, 0.76395968, 0.7221024, 0.75041776

Después de apretar 20 veces obtenemos 0.73918440 ; tras apretar 40 veces, 0.73908517 ...

El método de Newton nos da el cero buscado mucho más rápidamente.

Haciendo $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\operatorname{sen} x_n}$ con $x_0=1$, se tiene en pocos pasos:

x_1 =0.7503638678 , x_2 =0.7391128909 , x_3 =0.7390851334 , x_4 =0.7390851332 $= x5 = \cdots$

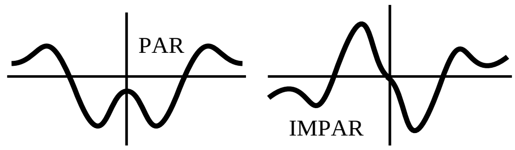
3.5. Representación de funciones

Cada función pide un tratamiento diferente. Las siguientes ideas no quieren ser una receta que haya que seguir desde el principio hasta el final. Por ejemplo, no tiene sentido buscar asíntotas verticales en una función continua en todo punto o empeñarse en calcular derivadas muy complicadas. La práctica en el dibujo de gráficas nos irá sugiriendo los tipos de cálculos a realizar en cada caso. Es importante conocer las gráficas de las funciones elementales.

• **Determinación del dominio**, y de los puntos en que f no es continua (posibles saltos de la función) o no derivable (picos de la gráfica, pendientes verticales).

• **Simetrías**: Si $f(-x) = f(x)$, función par, la gráfica de f es simétrica respecto al eje $x = 0$.

Si $f(-x) = -f(x)$, función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen.



• **Periodicidad** (sólo para algunas funciones trigonométricas): si $f(x+T) = f(x)$ basta pintar la gráfica en un intervalo de longitud T pues luego se repite periódicamente.

• **Asíntotas**: Verticales (rectas $x = c$): f tiende a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando $x \to c^-$ ó $x \to c^+$ (bastantes veces se puede calcular de una vez el límite cuando $x \to c$, pero muchas son precisos los laterales). Horizontales (rectas $y = c$): f tiende a c cuando $x \to +\infty$ ó $-\infty$.

Si no existen asíntotas horizontales (y la forma de la función lo aconseja) intentaremos escribir $f(x) = g(x) + h(x)$, con g función conocida y $h(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ (ó $-\infty$) . Entonces la gráfica de f se parecerá a la de g para x muy grandes (ó muy negativos). En particular, hallaremos así las posibles asíntotas oblicuas, sin recetas de memoria.

[En ocasiones todos estos límites se podrán calcular con los teoremas del capítulo 2 (los del tipo "7/∞=0"), pero si son indeterminados habrá que recurrir a L'Hôpital o Taylor (4.4); los desarrollos de Taylor, además, darán idea de la forma de la función cerca de un punto].

• **Información a partir de las derivadas** (utilizando los teoremas de 3.2):

A partir de la f' : intervalos de crecimiento y decrecimiento ($f' > 0$ y $f' < 0$); puntos x en los que f posee extremos locales (si $f'(c) = 0$, para ver si f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión con tangente horizontal en c, es muchas veces más fácil precisar el signo de f' antes y después de c que calcular la f'' y sustituirla en c; incluso, en ocasiones, basta dar valores a f en la proximidad de c para verlo; puede haber extremos en puntos sin derivada).

A partir de la f'' : puntos de inflexión ($f''(c) = 0$, aunque esto pueda no bastar); intervalos de concavidad y convexidad.

[Observemos que puede ser imposible determinar explícitamente los ceros de la f' y la f'' . Intentaremos entonces localizar cuántos ceros hay y en qué intervalos están (Bolzano puede ayudar). En bastantes ocasiones esos ceros serán raíces de polinomios (y serán aplicables las ideas de 3.3). El método de Newton de 3.4 nos permite aproximar los ceros con la precisión deseada si disponemos de una calculadora (mejor programable) u ordenador].

• **Valores concretos de** $f(x)$: Valores de f en $x = 0$ (corte con el eje y); en los x tales que $f'(x) = 0$ o en los x del dominio en los que no exista la f' , en puntos cercanos a estos x ; en los x tales que $f''(x) = 0$; en x de zonas en las que sepamos poco de la gráfica.

Valores de x para los que $f(x) = 0$ (cortes con el eje x , tal vez no calculables como ocurría con los ceros de f' y f''), deduciendo los intervalos en que $f(x)$ es positiva o negativa.

En ocasiones conviene también dar valores de f' (pendiente de la gráfica) en algún punto.

Hay funciones complicadas para las que casi todo fallará y habrá que limitarse a dar valores (en ese momento serán especialmente útiles las calculadoras y los ordenadores). Al final del capítulo 4 (cuando dominemos Taylor y los límites difíciles) dibujaremos alguna gráfica más.

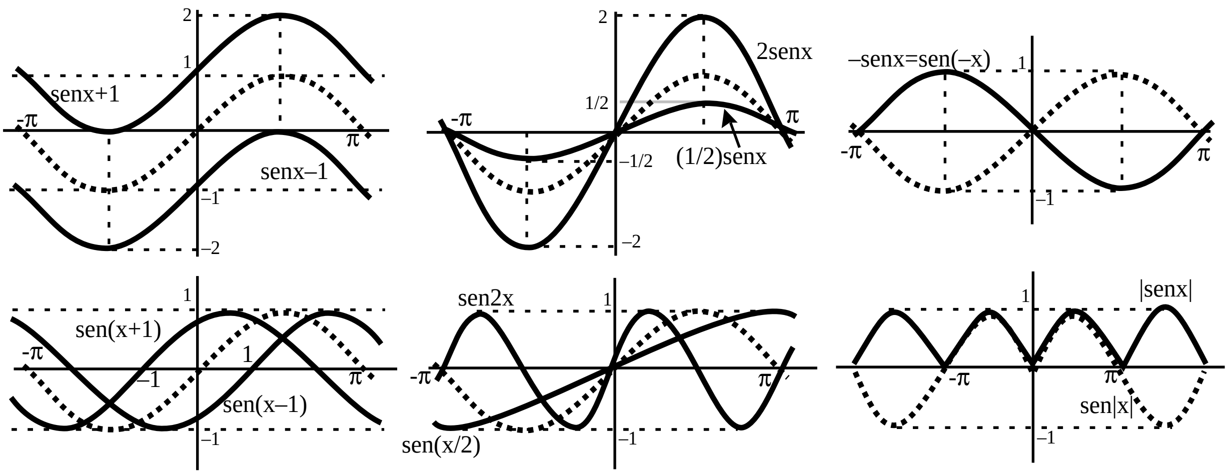
Se deducen de la gráfica de $f(x)$ las gráficas de:

$$f(x)+c\ ,\ f(x+c)\ ,\ cf(x)\ ,\ f(cx)\ ,\ -f(x)\ ,\ f(-x)\ ,\ |f(x)|\ \text{y}\ f(|x|)$$

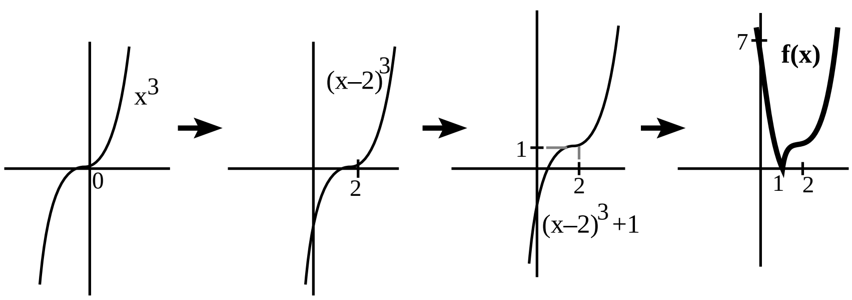
La de $f(x)+c$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia arriba ($c>0$) o abajo ($c<0$).
La de $f(x+c)$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia la izquierda o derecha ($c>,<0$).
La de $cf(x)$ con $c>1$ ($0<c<1$) es la de $f(x)$ estirada (comprimida) verticalmente.
La de $f(cx)$ con $c>1$ ($0<c<1$) es la de $f(x)$ comprimida (estirada) horizontalmente.
La de $-f(x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $y=0$.
La de $f(-x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $x=0$.
La de $|f(x)|$ se obtiene reflejando hacia arriba las partes de la de $f(x)$ que están bajo $y=0$.
La de $f(|x|)$ es la parte de la gráfica de $f(x)$ para $x\geq 0$ más su reflejo respecto a $x=0$.

[Todo es fácil de deducir. Por ejemplo, la gráfica de $g(x)=f(x+2)$ vale en $x=a$ lo que la f valía en $x=a+2$ y por eso la gráfica de g es la trasladada de f hacia la izquierda; la altura en cada punto de $g(x)=2f(x)$ es el doble de la f inicial y la de $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$ la mitad; $g(x)=f(|x|)$ vale $f(x)$ si $x\geq 0$ y además es par…]

Ej. De la gráfica de $\operatorname{sen}x$ (dibujada a puntos) deducimos las gráficas de: $\operatorname{sen}x+1$, $\operatorname{sen}x-1$, $\operatorname{sen}(x+1)$, $\operatorname{sen}(x-1)$, $2\operatorname{sen}x$, $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$, $\operatorname{sen}(2x)$, $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $-\operatorname{sen}x$, $\operatorname{sen}(-x)$, $|\operatorname{sen}x|$ y $\operatorname{sen}|x|$:



Ej. Un ejemplo que emplea varias de las ideas anteriores: $f(x)=\left|(x-2)^3+1\right|$.



[Más complicado es dibujar las dos funciones que define: $\begin{matrix} x^3-6x^2+12x-7, & \text{si } x\geq 1 \\ -x^3+6x^2-12x+7, & \text{si } x\leq 1 \end{matrix}$].

Dos funciones cuya gráfica no ofrece excesivas dificultades:

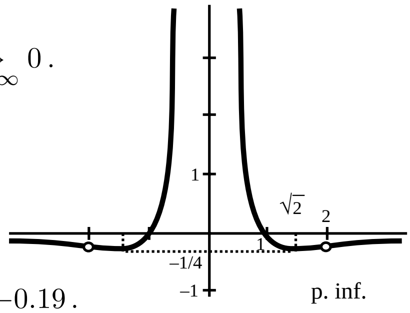
Ej. $f(x)=\frac{1-x^2}{x^4}$. Par. $\mathrm{dom} f=\mathbf{R}-\{0\}$. $f(x)\underset{x\to0}{\to}\infty$, $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$.

$f'(x)=\frac{2x^2-4}{x^5}$; $f''(x)=\frac{20-6x^2}{x^6}$.

Extremos: $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm1.41$, $f(\pm\sqrt{2})=-0.25$.

Inflexión: $i_\pm=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\approx\pm1.8$, $f(i_\pm)=-0.21$.

$f(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$, $f(\frac{1}{2})=12$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2$, $f(2)=-\frac{3}{16}\approx-0.19$.



Ej. $h(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x+1}}=\frac{|x|}{\sqrt{|x+1|}}$. $h(x)\geq0\ \forall x\in\mathrm{dom}h=(-1,\infty)$.

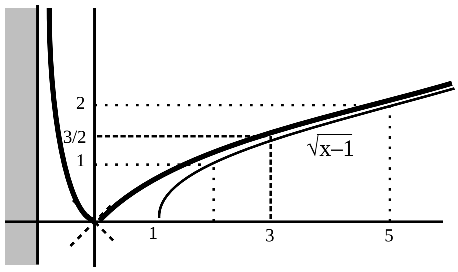
$h'(x)=\frac{-[x+2]}{2[x+1]^{3/2}}$ si $-1<x<0$ [decrece]; $h'(0^-)=-1$.

$h'(x)=\frac{-[x+2]}{2[x+1]^{3/2}}$ si $x>0$ [crece]; $h'(0^+)=1$.

$h''(x)=\frac{[x+4]}{4[x+1]^{5/2}}$, $-1<x<0$; $h''(x)=\frac{-[x+4]}{4[x+1]^{5/2}}$ $x>0$.

$h(x)=\sqrt{x-1+\frac{1}{x+1}}$ [se parece a $\sqrt{x-1}$ para x grande].

$h(x)\to\infty$ si $x\to-1^+$; $h(0)=0$, $h(-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}=h(1)$, $h(3)=\frac{3}{2}$.



Dibujamos ahora dos de los ejemplos manejables de 3.1:

Ej. $g(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ con $g(0)=0$ para que g sea continua.

$g(-x)=-g(x)$: impar. De las derivadas se saca poco:

$g'(x)=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\tan\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$ (infinitos cortes)

Pero podemos dar infinitos valores a la función:

Como $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x=\frac{2}{[4n+1]\pi}$; $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=-1\Leftrightarrow x=\frac{2}{[4n-1]\pi}$,

la gráfica de g toca en esos x la de x^2 y la de $-x^2$,

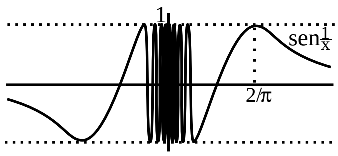
y para los demás x la gráfica oscila entre ambas.

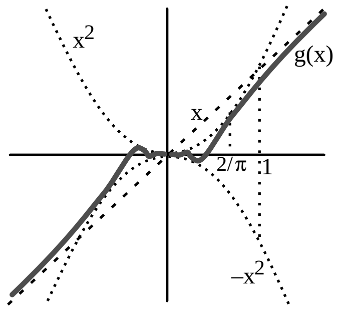
$\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{n\pi}$, otros infinitos puntos de la gráfica.

Como $\operatorname{sen}\frac{1}{x}\approx\frac{1}{x}$ si x gordo sospechamos que $g(x)\approx x$:

$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-x]=\lim_{t\to0^+}\frac{\operatorname{sen}t-t}{t^2}=0$$

(sabremos hacerlo por L'Hôpital o Taylor)





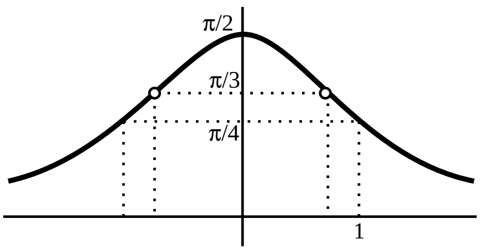
Ej. $n(x)=\arctan\frac{1}{x^2}$, $n(0)=\frac{\pi}{2}$. Par. $n(x)\geq0\ \forall x$.

$n'(x)=\frac{-2x}{1+x^4}\Rightarrow n$ crece si $x<0$ y decrece si $x>0$.

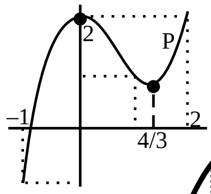
$n''(x)=2\frac{3x^4-1}{(1+x^4)^2}\Rightarrow$ cóncava si $|x|\leq3^{-1/4}\approx0.76$.

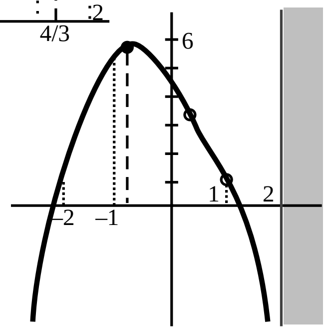
Valores: $n(1)=\frac{\pi}{4}$, $n(3^{-1/4})=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

$n'(0)=0$. $n(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$.



Dos últimos ejemplos con dificultades para hallar ceros:





Ej. $l(x) = x^3 + 6\log(2-x)$. $\mathrm{dom}\, l = (-\infty, 2)$.

$l(x) \to -\infty$ si $x \to 2^-$ ó $-\infty$, pues

$x^3[1 + \frac{6\log(2-x)}{x^3}] \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}$ "$-\infty \cdot [1+0] = -\infty$" [L'Hôpital]

$l'(x) = 3\frac{x^3-2x^2+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 2 = 0$??

$+ - +$ (0 ó 2 raíces positivas ??) ; $- - +$ (1 negativa [máx de l]);

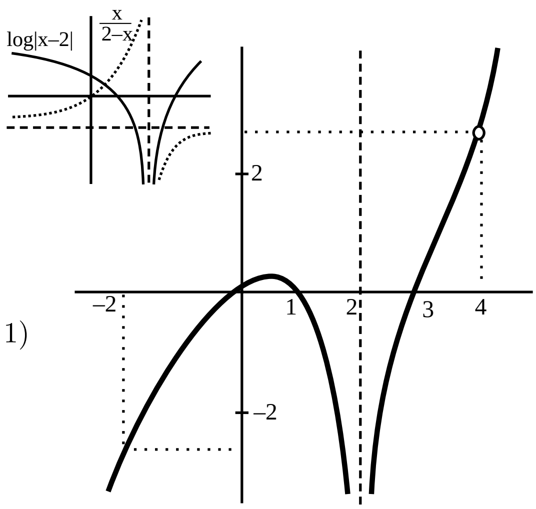
$P'(x) = 3x^2 - 4x$, $P(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27} > 0$, $P(0) = P(2) = 2$, $P(\pm 1) = \pm 1$

$\Rightarrow$ raíz de P [máx] en $c \in (-1, 0)$ [Newton: $c \approx -0{,}84$]; no mínimos.

$l''(x) = 6\frac{[x-1][x^2-3x+1]}{[x-2]^2} = 0$ si $x = 1$ ó $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.4$ [$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{dom}\, l$]

$\Rightarrow l$ convexa ($\cup$) entre los 2 p.inf. y cóncava en el resto de $\mathrm{dom}\, l$.

$l(1) = 1$, $l(0) = 6\log 2 \approx 4.1$, $l(-1) = 6\log 3 - 1 \approx 5.6$, $l(-2) = 12\log 2 - 8 \approx 0.3$.



Ej. $k(x) = x\log|x-2|$. $\mathrm{dom} k = \mathbf{R} - \{2\}$.

$k \underset{x\to 2}{\longrightarrow} -\infty$, $k \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $k \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$

$k(0) = k(1) = k(3) = 0$, $-k(-2) = k(4) = 4\log 2 \approx 2.8$

[Rolle asegura que hay al menos un cero de k' en $(0,1)$]

$k'(x) = \log|x-2| + \frac{x}{x-2}$; $k''(x) = \frac{x-4}{[x-2]^2}$.

$x = 4$ inflexión, $x < 4$ cóncava, $x > 4$ convexa.

$k' = 0$ donde se corten las gráficas de $\log|x-2|$ y $\frac{x}{2-x}$.

$k'(0) = \log 2 \approx 0.7$, $k'(1) = -1 \Rightarrow$ máximo en un $c \in (0,1)$

[utilizando Newton para k' con $x_0 = 0.5$:

$x_1 = 0.546370$, $x_2 = 0.545267 = x_3 = x_4 = \cdots$].

Cerca de $x = 2$ no se anula k' pues

$k' \to \infty$ si $x \to 2^+$, $k'(3) = 3$ y k' decrece en $(2,3)$.

3.6. Aplicaciones

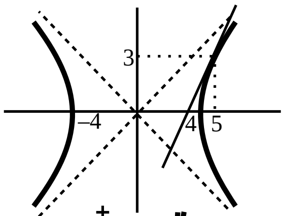
Tangentes a curvas.

Ej. Hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(5,3)$.

Más corto que despejar la y derivar la raíz resultante, derivamos **implícitamente** considerando la y como función de x :

$$2x - 2yy' = 0 \to y'(x) = \tfrac{x}{y} \text{ . Si } x=5, y=3 \text{ es}$$

$$y' = \tfrac{5}{3} \to y = 3 + \tfrac{5}{3}(x-3) \text{ , } 5x - 3y = 16 \text{ .}$$



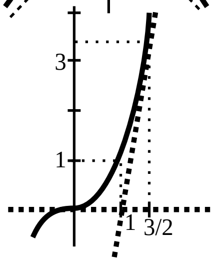
Ej. Para qué puntos de la curva $y = x^3$ la recta tangente pasa por $(1,0)$?

$y' = 3x^2 \to$ Recta tangente en el punto (a, a^3) :

$$y = a^3 + 3a^2(x-a) = 3a^2x - 2a^3 \text{ .}$$

Pasa por $(1,0)$ si $3a^2 - 2a^3 = 0 \to a = 0, a = \frac{3}{2} \to$ puntos $(0,0)$ y $(\frac{3}{2}, \frac{27}{8})$

[rectas tangentes respectivas: $y = 0$ e $y = \frac{27}{4}(x-1)$]

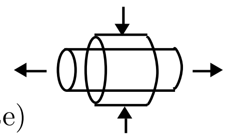


Ritmos de cambio.

Ej. Un cilindro se comprime lateralmente y se estira, de modo que el radio de la base decrece a un ritmo de 3 cm/seg y la altura crece a 8 cm/seg. Hallar el ritmo al que está cambiando el volumen cuando el radio es 5 cm y la altura 7 cm.

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h \to \frac{dV}{dt} = \pi[r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}] = 2\pi r[4r - 3h]$

Cuando $r = 5$ y $h = 7$, $V' = -10\pi$ cm^3/seg (el volumen decrece en ese instante)



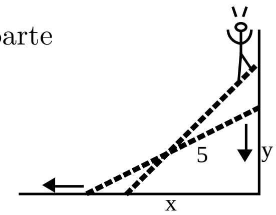
Ej. Una escalera de 5 m de largo permanece apoyada sobre una pared vertical y su extremo inferior se está alejando del pie de la pared a una velocidad constante de 2 m/s . Hallar la velocidad a la que desciende la parte superior cuando el extremo inferior está a 4 m de la pared.

Sea y la distancia al suelo de la parte superior y x la distancia de la parte inferior a la pared. Por pitágoras es: $y = \sqrt{25 - x^2}$. Entonces

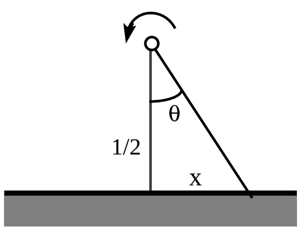
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}} \text{ . Cuando } x = 4 \text{ es } \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ .}$$

Por tanto el extremo de la escalera cae en ese instante a $\frac{8}{3}$ m/s.

[Curiosidad, si $x \to 5$ la velocidad de caída $\to \infty$ (!?)]



Ej. La luz de un faro situado a 1/2 Km de la una costa recta gira con un periodo de 12 segundos. Hallar la velocidad con la que la luz se mueve por la costa: i) en el punto P más cercano al faro, ii) en un punto situado a 2 Km de P , iii) un segundo después de pasar la luz por P .



Sean θ el ángulo y x la distancia descritos en el dibujo. Se tiene que $x = \frac{1}{2}\tan\theta$. La velocidad de crecimiento de θ es $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{6}$ radianes por segundo. La velocidad de la luz sobre la costa es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{12}(1 + 4x^2)$$

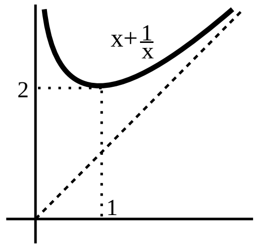
i) en P , $\theta = 0$, $x = 0 \to x' = \frac{\pi}{12}$ Km/seg ≈ 942 Km/h;

ii) $x = 2 \to x' = \frac{17\pi}{12}$ Km/seg ≈ 16022 Km/h;

iii) $\theta = \frac{\pi}{6} \to x' = \frac{\pi}{12}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{\pi}{9}$ Km/seg ≈ 1257 Km/h.

Máximos y mínimos.

Ej. Determinar (si existen) dos números positivos cuyo producto sea 1 y tales que su suma sea i) máxima, ii) mínima.

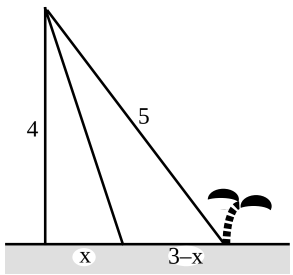


Sean los dos números x y $\frac{1}{x}$. Hay que buscar los extremos de $S(x)=x+\frac{1}{x}$ en el intervalo $(0,\infty)$ [como no es un intervalo cerrado podrían no existir].

$S'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0\to x=1$ (-1 no sirve); $S''(x)=\frac{2}{x^3}\to S''(1)=2$

hay, pues, un mínimo local en $x=1$. S derivable para todo x de $(0,\infty)$, $S(x)\to\infty$ cuando $x\to 0$ y cuando $x\to\infty \Rightarrow$ no hay máximo. Por tanto, el mínimo (absoluto) se da si $x=\frac{1}{x}=1$ (la suma es entonces 2).

Ej. Un nadador se halla en el mar a 4 km de una playa recta y a 5 km de una palmera situada en la playa junto al mar. Si nada a una velocidad de 4 km/h y camina por la playa a 5 km/h , cuál es el tiempo mínimo que debe emplear para llegar hasta la palmera?



El tiempo empleado en nadar hacia un punto situado a una distancia x de la perpendicular y luego caminar hasta la palmera es

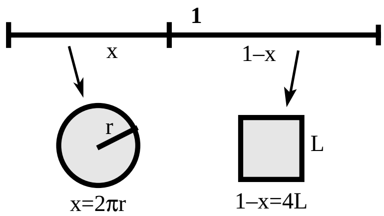
$$T(x)=\frac{\sqrt{16+x^2}}{4}+\frac{3-x}{5}\ ,\ \text{con } x\in[0,3]$$

[si $x\leq 0$ tarda más seguro y si $x\geq 3$ no vale la expresión de $T(x)$]

$$T'(x)=\frac{x}{4\sqrt{16+x^2}}-\frac{1}{5}=0\ \Rightarrow\ \frac{25}{16}x^2=16+x^2\ \Leftrightarrow x=\frac{16}{3},-\frac{16}{3}$$

Pero $\frac{16}{3}>3$ y $-\frac{16}{3}$ no cumple $T'=0$ con lo que el mínimo se toma en un extremo: $T(3)=\frac{5}{4}<T(0)=\frac{8}{5}$ [$T(\frac{16}{3})=\frac{6}{5}$ es mentira]. Así que debe nadar hacia la palmera (si ésta estuviese lejos sí convendría atajar).

Ej. Con un alambre de longitud 1 m se forman un cuadrado y una circunferencia. Cuánto alambre debe emplearse en cada figura para que la suma de sus áreas sea i) máxima, ii) mínima?



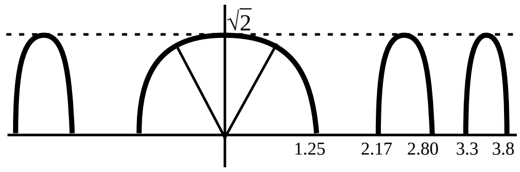
$$\text{Área total}=L^2+\pi r^2=\frac{[1-x]^2}{16}+\frac{\pi x^2}{4\pi^2}=\frac{[4+\pi]x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}=A(x)$$

con $x\in[0,1]$. Los máximos y mínimos (que existen, por ser A continua en $[0,1]$) se alcanzarán (A derivable en $(0,1)$) o bien en los extremos del intervalo o bien cuando $A'(x)=0$:

$$A'(x)=\frac{[4+\pi]x-\pi}{8\pi}=0\to x^*=\frac{\pi}{4+\pi}\approx 0.44\text{ m}$$

Como $A'<0$ si $x<x^*$, $A'>0$ si $x>x^*$, el mínimo se da en x^*, y como $A(0)=\frac{1}{16}<A(1)=\frac{1}{4\pi}$ el máximo en 1 (empleando todo el alambre para hacer el círculo [$A\approx 0.08\text{ m}^2$]; para el área mínima se usa alrededor de 44 cm para el círculo y 56 cm para el cuadrado [$A=\frac{1}{4[4+\pi]}\approx 0.035\text{ m}^2$]).

Ej. Hallar el punto de la gráfica de $f(x)=\sqrt{2\cos x^2}$ más cercano al origen.



Hallamos primero su dominio y dibujamos su gráfica:

$$\cos x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\cup[\tfrac{3\pi}{2},\tfrac{5\pi}{2}]\cup[\tfrac{7\pi}{2},\tfrac{9\pi}{2}]\cup\cdots$$

$$\Rightarrow \text{dom} f=\cdots\cup\Big[-\sqrt{\tfrac{5\pi}{2}},-\sqrt{\tfrac{3\pi}{2}}\Big]\cup\big[-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}},\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\big]\cup\Big[\sqrt{\tfrac{3\pi}{2}},\sqrt{\tfrac{5\pi}{2}}\Big]\cup\cdots$$

Mejor que minimizar la distancia, minimizamos su cuadrado (es lo mismo y evita derivar raíces):

$$d(x)=d[(0,0),(x,f(x)]^2=x^2+2\cos x^2;\ d'(x)=4x(\tfrac{1}{2}-\text{sen}\,x^2)=0\to x=0 \text{ ó } x^2=\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5\pi}{6},\tfrac{13\pi}{6}\cdots$$

El valor mínimo evidentemente se da en $[-\sqrt{\pi/2},\sqrt{\pi/2}\,]$. Candidatos son además estos extremos.

$$d(0)=2\ ,\ d(\pm\sqrt{\tfrac{\pi}{6}})=\tfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\approx 2.26\ ,\ d(\pm\sqrt{\tfrac{\pi}{2}})=\tfrac{\pi}{2}\approx 1.57\to \text{puntos más cercanos } \big(\pm\sqrt{\tfrac{\pi}{2}},0\big)\ .$$