4. Series, Taylor y límites indeterminados

4.1. Series de números reales

Queremos hacer 'sumas de infinitos números reales', llamadas **series**: $a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Por ejemplo, 'sumemos' $1/5+1/5^2+1/5^3+1/5^4+1/5^5+\cdots$. Sumar un número finito de términos siempre se puede: la suma de los 2 primeros es 0.24, la de los 5 primeros es 0.24992, la de los 10 es 0.2499999744, ... Pero carece de sentido 'sumar infinitas veces'. Cuando aparece la palabra 'infinito' en matemáticas se acude al concepto de límite. Dada una serie, siempre podemos hacer la suma de los k primeros términos, que llamaremos k-ésima suma parcial $S_k=a_1+\cdots+a_k$. Parece natural decir que la suma S de los infinitos a_n será el límite de la sucesión $\{S_k\}$. En el ejemplo anterior parece que este límite existe y parece ser $S=0.25$, pero este límite pudiera no existir para otras series. Así, para la serie $1-1+1-1+1-\cdots$ las sumas parciales van siendo $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0,\ldots$, sucesión divergente (y, por tanto, no se le puede asignar ningún valor a la suma de los infinitos términos). Lo primero que miraremos cuando nos encontremos con una serie es si la 'suma infinita' tiene sentido:

Def. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ es **convergente** si lo es la sucesión $\{S_k\}$ con $S_k=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n$. La **suma de la serie** es entonces el $\lim\limits_{k\to\infty}S_k$. Al a_n se le da el nombre de **término general** de la serie y se llama **sucesión de sus sumas parciales** a $\{S_k\}$. Si una serie no converge, se dice **divergente**.

[La serie converge si lo hace su sucesión de sumas parciales; otra cosa distinta es que converja su término general. Para $\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\cdots$ es $\{S_k\}=\{k\}$, que claramente diverge a ∞, y sin embargo converge la sucesión constante $\{a_n\}=\{1\}$; pronto veremos que para que la serie converja será necesario (pero no suficiente) que $\{a_n\}$ tienda hacia cero (para que pueda ser finita la suma de infinitos números es necesario que sean muy pequeños)].

De la definición y de las conocidas propiedades de los límites de sucesiones se deduce inmediatamente que **si suprimimos, cambiamos o añadimos un número finito de términos al principio de una serie, no se altera su carácter de convergencia o divergencia** (aunque sí el valor de su suma, si converge), porque las nuevas sumas parciales diferirán de la inicial sólo en un constante. Por eso, cuando estemos hablando simplemente de convergencia podremos no escribir el n en que empezamos a sumar; incluso escribiremos sólo $\sum$ (no olvidando que son infinitos términos).

También está claro (por las propiedades de sumas y productos de sucesiones) que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen y si $c\in\mathbf{R}$, también convergerán las series $\sum[a_n+b_n]$ y $\sum c\,a_n$ y que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+b_n]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}c\,a_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

¿Como saber si una serie converge o no? ¿Cuánto vale su suma si es convergente? Veremos una serie de **criterios** que nos permitirán responder en la práctica a la primera pregunta para muchas series (desde luego la definición $\varepsilon-N$ del límite de sucesiones no es adecuada, ni vimos en 2.2 teoremas para trabajar con sucesiones en las que el número de sumandos va creciendo). Respecto de la segunda, en casi todos los casos necesitaremos de calculadora u ordenador para dar simplemente un valor aproximado de la suma de la serie.

Dos casos en que se puede sumar la serie (excepcionales, porque podemos encontrar una expresión manejable de la sumas parciales; cuando veamos series de Taylor en 4.4 conoceremos la suma de alguna otra serie) son los siguientes:

Series geométricas (progresiones geométricas de infinitos términos):

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots} \text{ Si } r \neq 1 \text{ es } S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r} \Rightarrow \boxed{\text{Si } |r|<1\,,\ \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}}$$

Y si $|r| \geq 1$ diverge, al hacerlo S_k (también si $r=\pm 1$: $1+1+\cdots \to \infty$, $1-1+1-1+\cdots$ diverge)

Ej. Con esto vemos que $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+... = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\frac{1}{1-1/5} = \frac{1}{4} = 0.25$ como sospechábamos.

[De la misma forma que en este ejemplo, es fácil ver que, en general, $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$, si $|r|<1$].

Series telescópicas: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}[b_n - b_{n+1}]} \Rightarrow S_k = [b_1-b_2]+[b_2-b_3]+\cdots+[b_k-b_{k+1}] = b_1 - b_{k+1}$

Por tanto, la serie converge si y solo si $\{b_n\}$ converge y entonces su suma es: $\boxed{b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n}$

Ej. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$

Ej. $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}[\log n - \log(n+1)]$ es divergente, porque $\log n$ diverge hacia $+\infty$.

Salvo en estos dos casos nos conformaremos con saber si la serie que tratamos converge o no y con la calculadora para aproximar su suma (a ser posible, dando una cota del error cometido). Lo que sigue son los criterios más importantes para distinguir las series convergentes de las divergentes (hay más, pero aplicables en muy pocos casos prácticos). El primer criterio permite identificar un montón de series divergentes (muchas veces a simple vista):

Teorema: $\boxed{\text{Si } \sum a_n \text{ es convergente} \Rightarrow a_n \to 0}$ [la implicación opuesta ($\Leftarrow$) es **falsa**]

Como $a_n = S_n - S_{n-1}$, entonces $a_n \to 0$, pues S_n y S_{n-1} tienen, desde luego, el mismo límite.

Ej. $\sum \frac{n+1}{20000n}$ es divergente, porque el término general a_n no tiende a 0 (tiende a $\frac{1}{20000}$).

Ej. $\sum(-1)^n e^{1/n}$ diverge, porque a_n tampoco tiende a 0 (ni a nada; pares $\to 1$, impares $\to -1$).

Veamos que $\Leftarrow$ es falso, o sea, que no basta que los números que sumemos tiendan a 0 para que la serie converja. Para ello basta un contraejemplo. Probemos que

$$\boxed{\text{la '}\textbf{serie armónica}\text{' } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \textbf{ diverge}:}$$

$a_n \to 0$, pero la suma es 'infinito' [imposible verlo con calculadora: S_1=1, S_2=1.5,..., $S_{10} \approx 2.929$, ..., $S_{100} \approx 5.187$, ..., $S_{1000} \approx 7.485$,... no parece estabilizarse, pero los términos muy altos acabarían por no afectar al número de la pantalla, pues la calculadora maneja sólo unos cuantos dígitos]:

Sea la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots$, de sumandos menores que los de la armónica. Tenemos entonces que: $S_2 = 1+\frac{1}{2}$, $S_4 > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $S_8 > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\cdots$, $S_{2n} > 1+\frac{n}{2}$.
Y por tanto la sucesión de sumas parciales de la armónica diverge (ni siquiera está acotada).

Series de términos positivos, $\boxed{a_n \geq 0}$ [o de términos negativos, pues $\sum a_n = -\sum(-a_n)$].

Observemos que entonces las sumas parciales forman una sucesión creciente.

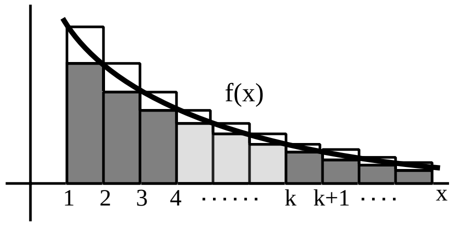
Veamos varios criterios de convergencia. El primero exige saber algo de integrales y límites de funciones, pero lo necesitamos para tratar las importantes series $\sum \frac{1}{n^s}$. Se define:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ (si el límite existe; la integral se dice convergente)}$$

Criterio integral:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sea } f(x) \text{ función positiva y decreciente para } x \geq 1. \text{ Entonces la serie } \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ converge} \\ \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ converge. El error está acotado por } \int_{k+1}^\infty f(x)dx \leq S - S_k \leq \int_k^\infty f(x)dx \ .\end{array}}$$

Este criterio, es de los pocos que dan cota del error cometido al sustituir la suma S de la serie convergente por la k-ésima suma parcial. No lo demostramos. Recordando el significado geométrico de la integral, es intuitivamente claro a partir del dibujo.



$$\boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \text{ converge si } s>1 \text{ y diverge si } s \leq 1}$$

Si $s \leq 0$, el término general no tiende a 0 y la serie diverge.

Si $s > 0$, la función $f(x) = x^{-s}$ es positiva y decreciente y aplicamos el criterio anterior:

$$\text{si } s \neq 1 \,,\ \int_1^b x^{-s}dx = [1-b^{1-s}] \ ; \quad \text{si } s=1 \,,\ \int_1^b x^{-1}dx = \log b \ .$$

Si $b \to \infty$, la primera integral tiene límite para $s > 1$ y $\to \infty$ si $0 < s < 1$. La segunda $\to \infty$.

Ej. Para aproximar la suma S de la serie convergente $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ sumamos 50 términos y obtenemos S_{50} =1.201860... ¿Qué error E hemos cometido? El criterio integral nos dice que:

$$\int_{51}^\infty \frac{dx}{x^3} = \left[-x^{-2}\right]_{51}^\infty = \frac{1}{2\cdot 51^2} = 0.000192... \leq E = S - S_{50} \leq \int_{50}^\infty \frac{dx}{x^3} = \left[-x^{-2}\right]_{50}^\infty = \frac{1}{2\cdot 50^2} = 0.0002$$

El valor de S (no calculable exactamente) está comprendido entre 1.202052... y 1.202060...

En los dos siguientes criterios compararemos nuestra serie con otra cuya convergencia conozcamos (normalmente con las $\sum \frac{1}{n^s}$; por eso serán adecuados cuando hay como mucho potencias de n; si aparecen términos mayores, como 3^n o $n!$, suele ser mejor utilizar el cociente o la raíz que veremos).

Criterio de comparación por desigualdades:

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq a_n \leq b_n \text{ , entonces } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^\infty a_n \leq \sum_{n=1}^\infty b_n}$$

[Y por tanto $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge. Pero no se obtiene ninguna conclusión de que la mayor diverja o de que la menor converja].

Sean $S_k = a_1 + \cdots + a_k$, $T_k = b_1 + \cdots + b_k$. Son sucesiones crecientes con $0 \leq S_k \leq T_k$. Entonces: T_k convergente $\Rightarrow T_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ convergente y $\lim S_k \leq \lim T_k$.

Ej. $\sum \frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3+n}$ converge, ya que $0 \leq \frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3+n} \leq \frac{2}{n^3}$ y sabemos que $\sum \frac{2}{n^3} = 2\sum \frac{1}{n^3}$ converge.

Ej. $\sum \frac{n+1}{n^2}$ diverge, pues $\frac{n+1}{n^2} \geq \frac{1}{n}$ y la armónica diverge (de $\frac{n+1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}$ no sacaríamos nada).

Lo podemos afirmar sin el criterio: la suma de una $\sum a_n$ convergente y otra $\sum b_n$ divergente es divergente (si convergiese, $\sum[a_n + b_n] - \sum a_n = \sum b_n$ convergería) y esto le pasa a nuestra serie $\sum[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}]$. [Que conste que la suma o diferencia de dos divergentes sí puede ser convergente].

Trabajar con desigualdades puede ser complicado, por eso suele ser bastante más útil:

Criterio de comparación por paso al límite:

Sean a_n , $b_n \geq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (finito). Entonces:
Si $c > 0$, $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge. Si $c = 0$, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Si $c > 0$, para $n \geq N$, $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{c}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2}b_n$ y aplicamos el criterio anterior.
Si $c = 0$, para $n \geq N$, $0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$ y otra vez el criterio.

A partir de ahora, para abreviar, representaremos con el símbolo "$\sim$" el hecho de que a dos series les podemos aplicar la primera parte de este criterio, es decir:

$$\boxed{a_n \sim b_n \text{ si } \frac{a_n}{b_n} \to c > 0}$$

[A pesar del símbolo elegido, no quiere decir esto que, aunque las dos series converjan a la vez, la suma de una se parezca a la de la otra (intentemos no escribir $\sum a_n \sim \sum b_n$)].

Esta parte del criterio con $c > 0$ permite determinar la convergencia de muchas series a simple vista, fijándose sólo en los términos n^s que 'mandan' en numerador y denominador:

Ej. $\sum \frac{n-1}{n^2}$ diverge, porque $a_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ (es decir, $\frac{a_n}{1/n} = \frac{n}{n-1} \to 1 > 0$) y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

[La comparación por desigualdades no es adecuada aquí (de la acotación sencilla $a_n \leq \frac{1}{n}$ no sale nada, pues aunque la gorda diverja la menor podría converger); en cambio, para el primer ejemplo del criterio anterior, como $\frac{\operatorname{sen} n+1}{n^3+n}$ no se parece a $\frac{1}{n^3}$ ($\frac{a_n}{1/n^3}$ no tiene límite), el paso al límite no parece adecuado (se puede usar la parte con $c = 0$, pero es más fácil usar desigualdades)].

Ej. $\sum \frac{5\sqrt{n} - 173}{n^2 + \cos n}$ converge, pues $a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ ($\frac{a_n}{1/n^{3/2}} \to 5 > 0$) y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente.

[Aunque sean unos cuantos $a_n < 0$, esto no impide aplicar criterios para series de términos positivos, pues la convergencia se mantiene si los quitamos].

Ej. $\sum \frac{\arctan n}{4n^2+3}$ converge, ya que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ ($\frac{a_n}{1/n^2} \to \frac{\pi}{8}$, pues $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$) y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Ej. $\sum \frac{1}{7^n + (-1)^n}$ converge: $a_n \sim \frac{1}{7^n}$ ($\frac{a_n}{1/7^n} \to 1 > 0$) y $\sum \left(\frac{1}{7}\right)^n$ es geométrica convergente.

[Alguna vez compararemos con otras series conocidas y no sólo con las $\sum \frac{1}{n^s}$].

Ej. $\sum \operatorname{sen} \frac{1}{n^3}$. La sucesión $\frac{1}{n^3} \to 0$ y sabemos ya que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Por los teoremas que relacionan límites de sucesiones y funciones se tiene que $\frac{a_n}{1/n^3} \to 1$. Como $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, la dada también.

Cuando los términos que dominen contengan logaritmos habrá que aplicar la segunda parte (la de $c = 0$) de este criterio (porque $\log n$ no es parecido a ninguna potencia de n):

Ej. $\sum \frac{\log n}{n^4}$ converge, pues $\frac{\log n/n^4}{1/n^3} = \frac{\log n}{n} \to 0$ y $\sum \frac{1}{n^3}$ (más gorda) converge.

$\sum \frac{\log n}{n}$ diverge, pues $\frac{1/n}{\log n/n} \to 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ (más pequeña) diverge.

[o por desigualdades $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$ si $n \geq 3$] [o por el integral $\int_1^\infty \frac{\log x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^\infty \to \infty$].

$\sum \frac{\log n}{n^2}$ converge, pues $\frac{\log n/n^2}{1/n^{3/2}} = \frac{\log n}{n^{1/2}} \to 0$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

[para ésta hemos tenido que afinar un poco pues $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente pero más pequeña que la nuestra y $\sum \frac{1}{n}$ es mayor pero divergente].

Series de términos cualesquiera.

Dada $\sum a_n$ podemos considerar la serie, de términos positivos, de los valores absolutos $\sum |a_n|$.

Teorema: $\boxed{\sum |a_n| \text{ es convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente}}$

$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum [a_n + |a_n|]$ converge (criterio de comparación por desigualdades) $\Rightarrow \sum [a_n + |a_n|] - \sum |a_n| = \sum a_n$ converge

La implicación $\Leftarrow$ es falsa: pronto veremos series $\sum a_n$ convergentes pero tales que $\sum |a_n|$ diverge. Diremos que $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum |a_n|$ es convergente (el teorema de arriba dice que absolutamente convergente $\Rightarrow$ convergente). Diremos que $\sum a_n$ es **condicionalmente convergente** si converge, pero no absolutamente.

Ej. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge absolutamente (y por tanto converge) pues $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge ($\sim \frac{1}{n^2}$).

Ej. $\sum \frac{\cos n}{3^n}$. $\sum \frac{|\cos n|}{3^n} \leq \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ geométrica convergente $\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Ej. $\sum \frac{\cos n}{n}$. De $\sum \frac{|\cos n|}{n}$ no sacamos nada ($\leq \sum \frac{1}{n}$ divergente). No sabremos decir si converge.

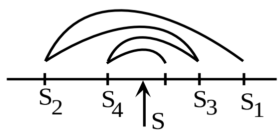
Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ no converge absolutamente ($\sum \frac{1}{n}$ diverge), pero sí condicionalmente (hacia $\log 2$ como se verá) por el siguiente criterio para series **alternadas** ($+ - + - + - \cdots$):

Criterio de Leibniz:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } a_n \geq 0 \text{ es decreciente y } \underset{n\to\infty}{a_n \to 0} \text{ entonces } \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \text{ converge.} \\ \text{Además, el error absoluto } |S - S_N| \leq a_{N+1} \text{ (primer término que se omite).}\end{array}}$$

Es fácil ver que por ser $\{a_n\}$ decreciente:

$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1$



Como S_{2n} y S_{2n+1} son monótonas y acotadas convergen (al mismo límite, pues $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$), con lo que la serie converge.

Sea S su suma. Se ve que para todo n es $\boxed{S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}}$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}; |S - S_{2n}| \leq a_{2n+1} \\ 0 \leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}; |S - S_{2n-1}| \leq a_{2n} \end{array}\right. \Rightarrow \forall N, \text{ par o impar, } |S - S_N| \leq a_{N+1}.$$

[Si la serie fuese $\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - \cdots$, el criterio y la cota del error absoluto serían iguales. No olvidemos que esta cota tan sencilla del error sólo se tiene para estas series de Leibniz. Para las de términos positivos convergentes las sumas parciales S_n se acercan a la suma S formando una sucesión creciente y el error $S - S_N$ es, por tanto, **mayor** que el siguiente término a_{N+1} ; el único criterio que nos ha dado cota del error es el integral (pero es aplicable a muy pocas series)].

Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ convergía absolutamente. También podemos ver que converge usando Leibniz: es alternada, $\frac{1}{n^2+1} \to 0$ y $\forall n$ es $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1}$. Estimemos el valor de su suma S.

Por ejemplo, es: $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} = 0.341.. < S < \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.4$, acotación nada precisa.

Si queremos el valor con $|\text{error}| < 10^{-3}$ debe ser $a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^2+1} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (N+1)^2 > 999$.

Esto sucede si $N \geq 31$ (pues $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$). Hay que sumar 31 términos.

[Con ordenador (o mucha paciencia), $S \approx S_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{962} \approx 0.364$].

Ej. $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$ es alternada y $a_n \to 0$, pero **no decrece** (y Leibniz no es aplicable).

De hecho diverge: $S_2=1$, $S_4=1+\frac{1}{2}$, ..., $S_{2n}=1+\cdots+\frac{1}{n} \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

Ej. Veamos para qué valores de a converge $\sum (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n^a}$ y para cuales lo hace absolutamente.

Si $a \le 0$, el término general no tiende a 0 (difícil probarlo con rigor) y, por tanto, diverge.

Si $a>0$, es convergente por Leibniz, pues $a_n=\operatorname{sen}\frac{1}{n^a}>0$ (es alternada), $a_n \to 0$ claramente ($\operatorname{sen}x$ continua en $x=0$, $\frac{1}{n^a} \to 0$ y $\operatorname{sen}0=0$) y a_n es decreciente (por crecer $\operatorname{sen}x$ en $[0,1]$).

¿Para cuáles de estos valores $a>0$ converge $\sum \operatorname{sen}\frac{1}{n^a}$? Por tender $\frac{\operatorname{sen}x}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$ y ser $\{\frac{1}{n^a}\}$ una sucesión que (si $a>0$) tiende a 0 , se tiene que $\operatorname{sen}\frac{1}{n^a} \sim \frac{1}{n^a}$ y, por tanto, la serie converge absolutamente si $a>1$ (lo hace condicionalmente si $a \in (0,1]$).

Para las series (de términos positivos o de signo no definido) con n en los exponentes o factoriales son muy útiles los dos siguientes criterios (para las parecidas a $\sum[1/n^s]$ no sirven):

Criterio del cociente:

$$\boxed{\text{Sea } \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=r \text{ . Entonces: } \begin{array}{l} \text{si } r<1 \text{ , } \sum a_n \text{ converge (absolutamente)} \\ \text{si } r>1 \text{ (ó } r=\infty) \text{ , } \sum a_n \text{ diverge} \end{array}}$$

(y si $r=1$, el criterio no decide: la serie puede converger o divergir)

$r<1$: sea s con $r<s<1$. $\exists N$ tal que si $n \ge N \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le s$, es decir, $|a_{n+1}| \le s|a_n|$.

Por tanto $|a_{n+k}| \le \cdots \le s^k|a_n|$ si $n \ge N$. Así: $\sum\limits_{n=N}^{\infty}|a_n|=|a_N|+|a_{N+1}|+\cdots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_{N+k}|$

$\le |a_N| \sum\limits_{k=0}^{\infty}s^k$, geométrica convergente $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_n|$ también converge $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_n$ converge.

$r>1$: $\exists N$ tal que si $n \ge N$ es $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$, o sea, $|a_{n+1}|>|a_n|$ y $\not\to 0$ el término general.

Cuando se vean muchas potencias n-simas (y no factoriales) en la serie conviene utilizar:

Criterio de la raíz:

$$\boxed{\text{Sea } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r \text{ . Entonces: } \begin{array}{l} \text{si } r<1 \text{ , } \sum a_n \text{ converge (absolutamente)} \\ \text{si } r>1 \text{ (ó } r=\infty) \text{ , } \sum a_n \text{ diverge} \end{array}}$$

(y si $r=1$, de nuevo no sabemos; casi siempre es $r=1$ a la vez utilizando cociente y raíz)

$r<s<1$: $\exists N/\, n \ge N$, $\sqrt[n]{|a_n|} \le s$, $|a_n| \le s^n \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_n|$ converge $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_n$ converge.

$r>1$: $\exists N/\, n \ge N$, $\sqrt[n]{|a_n|}>1$, $|a_n|>1$ y no tiende a 0 el término general.

Ej. $\sum \frac{1}{n^s}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{n^s}{(n+1)^s} \to 1$; $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{(n^{1/n})^s} \to 1$ (pues $\sqrt[n]{n} \to 1$). Ni cociente ni raíz deciden.

Ej. $\sum \frac{(-3)^n}{3+n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!}\frac{3+n!}{3^n}=3\frac{3/n!+1}{3/n!+n+1} \to 0$. Es convergente (absolutamente).

[Por Leibniz es complicado y con la raíz no sabemos hacerlo pues desconocemos como va $\sqrt[n]{n!}$]

Ej. $\sum \left[\frac{n}{n+2}\right]^{n^2}$. $\sqrt[n]{|a_n|}=\left[1-\frac{2}{n+2}\right]^n=\left([1-\frac{2}{n+2}]^{-(n+2)/2}\right)^{-2n/(n+2)} \to \mathrm{e}^{-2}<1$. Converge.

Ej. $\sum(-1)^n 2^n 7^{-\sqrt{n}}$. $\sqrt[n]{|a_n|}=2\left[7^{-\sqrt{n}}\right]^{1/n}=2\cdot 7^{-1/\sqrt{n}} \to 2$;

o bien, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=2\,\frac{7^{\sqrt{n}}}{7^{\sqrt{n+1}}}=7^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \to 2$ (pues $\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 1$). Diverge.

Ej. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\log n} \to 0$. Converge.

Ej. $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/n}} \to 1$. La raíz no decide (a pesar de que tenía pinta de ser el criterio adecuado). Como $r=1$ probablemente haya que aplicar desigualdades o paso al límite:

Por $\leq$: $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \geq \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n}$ divergente $\Rightarrow$ la nuestra es divergente.

Por $\to$: $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \sim \frac{1}{n}$ (puesto que $\frac{a_n}{1/n} = \left[\frac{n+1}{n}\right]^n \to \mathrm{e}$) $\Rightarrow$ la nuestra diverge.

En los dos siguientes discutimos la convergencia dependiendo de los valores de los a y b que aparecen:

Ej. $\sum \frac{n^a}{b^n}$, con $a>0$, $b \neq 0$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^a |b|^n}{n^a |b|^{n+1}} = \frac{(1+1/n)^a}{|b|} \to \frac{1}{|b|} \text{ (o bien, } \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n^{1/n})^a}{|b|} \to \frac{1}{|b|} \text{).}$$

Cociente y raíz aseguran que converge para $|b|>1$ (y de esto deducimos que $n^a/b^n \to 0$ si $|b|>1$) y que diverge para $|b|<1$. Para $b=\pm 1$ los criterios no deciden, pero está claro que diverge porque el término general no tiende a 0 (bastaba esto para decir que divergía para $|b| \leq 1$).

Ej. $\sum \frac{b^n}{n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|b|^{n+1}/(n+1)!}{|b|^n/n!} = \frac{|b|}{n+1} \to 0$. Convergente $\forall b$, por gordo que sea.

Por tanto, $b^n/n! \to 0$ para cualquier b , límite que no es fácil de calcular directamente.

Ej. $\sum \frac{n!}{n^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Converge.

[Y de aquí, $n!/n^n \to 0$, otro límite que no era trivial calcular]

Los tres últimos ejemplos (y un límite admitido en sucesiones) nos permiten comparar la rapidez con que varias sucesiones se van al ∞ . El símbolo “$\ll$” representará que lo de la izquierda dividido entre lo de la derecha tiende a 0 cuando n tiende a ∞ :

$$\boxed{\log n \ll n^a, a>0 \ll b^n, b>1 \ll n! \ll n^n}$$

Veamos ahora un ‘serie de potencias’ (tratadas a fondo en 4.3). Estudiemos para qué x converge:

Ej. $\sum \frac{x^{2n}}{4^n n^2}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^2 n^2}{4(n+1)^2} \to \frac{|x|^2}{4}$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|^2}{4n^{2/n}} \to \frac{|x|^2}{4}$ (pues $[n^{1/n}]^2 \to 1^2$) .

Por tanto, la serie converge si $|x|<2$ y diverge si $|x|>2$. Si $|x|=2$ ($x=\pm 2$) estos criterios no deciden, pero entonces $\sum 1/n^2$ converge como ya sabemos. En resumen, converge si $x \in [-2,2]$. Para cada x de ese intervalo la suma será un número real diferente, con lo que la serie define una función $f(x)$. Podemos mirar cada sumando como una función de x. Cada una de ellas ($K \cdot x^{2n}$) es continua. ¿Lo será la $f(x)$? Este tipo de preguntas las responderemos en las secciones siguientes.

Acabemos con otra serie en que los sumandos dependen de x (otra ‘serie de funciones’):

Ej. $\sum \frac{\operatorname{sen}^n x}{\sqrt{n}}$. Como $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n}\,|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{n+1}} \to |\operatorname{sen} x|$, la serie converge si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ el cociente no decide. Si k es par, la serie que resulta $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

Si k es impar, queda $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente (Leibniz). Converge pues si $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

4.2. Sucesiones y series de funciones

Consideramos **sucesiones** cuyos términos son **funciones** con un dominio común A :

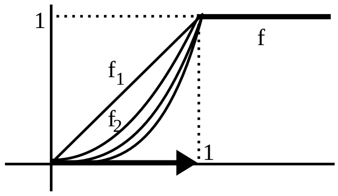
$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ... \text{ para } x \in A$$

Para cada x fijo de A tenemos una sucesión $\{f_n(x)\}$ de números reales y en muchos casos sabemos (desde 2.2) calcular su límite (si lo tiene), que, en general, será una función de x. Damos un nombre nuevo a esta vieja convergencia (para cada punto x) para distinguirla de la que definiremos un poco más adelante:

Def. $\{f_n\}$ **converge puntualmente** hacia f en A si para cada $x \in A$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = f(x)$.

Sería bueno que f conservase las propiedades de las f_n , pero esto, en general, no ocurre:

Ej. $f_n(x) = \begin{cases} x^n \,,\ 0 \le x \le 1 \\ 1 \,,\ 1 \le x \end{cases}$. Todas las f_n son continuas en $[0, \infty)$.



Para cada $x \in [0, \infty)$ existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \,,\ 0 \le x < 1 \\ 1 \,,\ 1 \le x \end{cases}$.

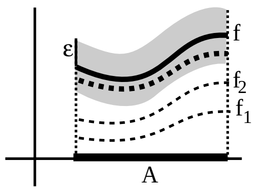
Y, sin embargo, la función límite puntual $f(x)$ es discontinua.

Para que se conserve la continuidad es necesaria una definición más fuerte de convergencia:

Def. $\{f_n\}$ **converge uniformemente** hacia la función f en A si $\forall \varepsilon > 0$ existe algún N tal que $\forall x \in A$, si $n \ge N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

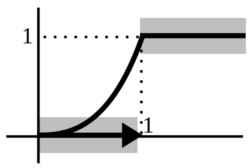
[El N vale $\forall x$, sólo depende de ε ; en cambio, la convergencia puntual quiere decir que: $\forall x \in A$ y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon, x)$ tal que si n≥N entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$]

Gráficamente, que $\{f_n\} \to f$ uniformemente significa que a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan totalmente dentro de una banda de altura 2ε alrededor de la de f . Si la convergencia de las f_n es sólo puntual, para cada x el N será distinto y no se podrá dar uno que sea válido para todos los puntos de A .



Evidentemente, **convergencia uniforme $\Rightarrow$ convergencia puntual. Pero $\Leftarrow$ es falsa**:

Esto lo prueba la $\{f_n\}$ de arriba: por muy alto que sea el N siempre existen funciones de la sucesión que se salen de la banda de radio ε . Formalizando algo más: toda f_n toma el valor $\frac{1}{2}$ que queda fuera de la banda si $\varepsilon < 1/2$. Para cada x existe N tal que si $n \ge N$ el punto $(x, f_n(x))$ está dentro de la banda, pero hace falta elegir unos N mayores a medida que nos acercamos a 1 . En un intervalo $[0, a]$, con $a < 1$, la convergencia sí sería uniforme, pues el N que valiese para el punto $x = a$ claramente valdría también para el resto de los x .

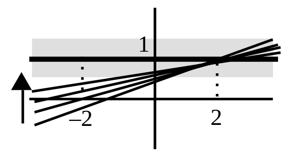


Ej. Estudiemos la convergencia de $g_n(x) = \frac{n+x}{n+2}$ en i) $A = [-2, 2]$, ii) $A = \mathbf{R}$

Hay límite puntual en todo $\mathbf{R}$ pues $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \ \forall x$.

Y en $[-2, 2]$ es también uniforme:

$|\frac{n+x}{n+2} - 1| = \frac{|x-2|}{n+2} \le \frac{|x|+2}{n+2} \le \frac{4}{n+2} \le \frac{4}{n} < \varepsilon$ si $n \ge N > 4/\varepsilon \ \forall x \in [-2, 2]$.



Pero no converge uniformemente en $\mathbf{R}$ porque todas las g_n (no acotadas) se escapan de la banda.

Para estudiar la convergencia uniforme, como siempre en las definiciones con ε , hemos partido de lo que se quería hacer pequeño y avanzado mediante desigualdades hacia una expresión más sencilla. Ha sido esencial hacer desaparecer la x , pues el N buscado debía depender solo de ε . De hecho, podemos ahorrarnos las últimas cuentas con el sencillo teorema:

Teorema:

$$\boxed{\text{Si } |f_n(x)-f(x)|<a_n \ \forall x\in A \text{ y } a_n\to 0 \text{ entonces } f_n(x)\to f(x) \text{ uniformemente en } A}$$

(pues dado ε , el N que asegura $a_n<\varepsilon$ nos vale, desde luego, para todos los $x\in A$).

Para encontrar el a_n en ocasiones bastará hacer acotaciones, como en el ejemplo anterior, pero otras veces será más complicado y, como en el siguiente, habrá que utilizar derivadas:

Ej. Estudiemos la convergencia de $h_n(x)=\frac{x}{1+n^4x^2}$.

Está claro que $\{h_n\}$ converge puntualmente en todo $\mathbf{R}$: $\frac{x}{1+n^4x^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall x$.

Si queremos ver la convergencia uniforme en todo $\mathbf{R}$ de $\{h_n\}$ nos encontramos con problemas:

$|h_n(x)-0|=\frac{|x|}{1+n^4x^2}$ no parece acotable en $\mathbf{R}$ (la cota sencilla $\leq |x|$ no lleva a nada).

[a partir de lo anterior sí sería fácil ver que si hay convergencia puntual en $[1,2]$, por ejemplo]

Un modo natural de acotar $|f_n(x)-f(x)|$ (a parte de los $\leq$) es buscar el máximo de esa diferencia.

En nuestro caso, para acotar $|h_n(x)|$ vamos a hallar los extremos de cada $h_n(x)$:

$$h_n'(x)=\frac{1-n^4x^2}{[1+n^4x^2]^2}=0\Rightarrow h_n(x) \text{ crece en } [-\tfrac{1}{n^2},\tfrac{1}{n^2}] \text{ y decrece en el resto de } \mathbf{R}\,.$$

$$h_n(\pm\tfrac{1}{n^2})=\pm\tfrac{1}{2n^2} \text{ y además } h_n(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0\,. \text{ Así que } |h_n(x)|\leq \tfrac{1}{2n^2}=a_n \ \forall x\in\mathbf{R}\,.$$

Como $a_n\to 0$, $\{h_n\}\to 0$ uniformemente en $\mathbf{R}$ (en contra de lo que se podía pensar en principio).

Probemos que la convergencia uniforme tiene una buena propiedad que la puntual no tenía:

Teorema:

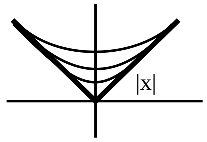
$$\boxed{f_n \text{ continuas en un intervalo } I \text{ y } \{f_n\}\to f \text{ uniformemente en } I\Rightarrow f \text{ continua en } I}$$

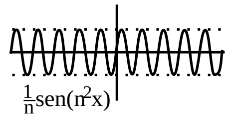
Veamos que f es continua en un $x\in I$ cualquiera.
Sea $\varepsilon>0$. Por la convergencia uniforme, existe algún n tal que $|f(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3} \ \forall y\in I$.
En particular, para todo h tal que $x+h\in I$, $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ y $|f(x+h)-f_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
Como f_n es continua en x existe un $\delta>0$ tal que si $|h|<\delta$ entonces $|f_n(x+h)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
Por tanto, si $|h|<\delta$ entonces

$$|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\,.$$

[Este teorema basta para probar que las f_n del primer ejemplo no convergen uniformemente en $[0,\infty)$, pues si la convergencia fuese uniforme, la $f(x)$ debería ser continua].

[Si las f_n son derivables, que $f_n\to f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede ser f derivable y no coincidir f' con el límite de las derivadas (situaciones sugeridas por los ejemplos de la derecha); para que se cumplan ambas cosas es necesario exigir además que las f_n' también converjan uniformemente].





Todo lo anterior se aplica de modo natural a las **series de funciones:**

Def. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \text{ converge puntualmente o uniformemente en } A \text{ hacia } f \text{ si lo hace la sucesión de sumas parciales } S_n = f_1 + \cdots + f_n}$

Por lo visto para sucesiones de funciones y como S_n es continua si las f_n lo son tenemos que:

$$\boxed{\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f \text{ uniformemente y las } f_n \text{ son continuas en un intervalo } I \Rightarrow f \text{ es continua en } I}$$

Aunque la definición de convergencia uniforme de series de arriba aparenta ser tan simple, está claro que será casi imposible de aplicar en la práctica (la puntual sí es fácil, aplicando para x fijos los criterios vistos para series numéricas). Es claro que casi nunca se podrá hallar directamente el N que haga $|f_1(x) + \cdots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (ni siquiera sabemos quien es $f(x)$, pues casi ninguna serie se puede sumar). Pero hay un criterio muy útil que permite ver para bastantes series de funciones que convergen uniformemente:

Criterio de Weierstrass

$\boxed{\text{Sean } \{f_n\} \text{ definidas en } A \text{ y } \{M_n\} \text{ una sucesión de números reales tal que } |f_n(x)| \leq M_n\ \forall x \in A \text{ y tal que } \sum M_n \text{ converge. Entonces } \sum f_n \text{ converge uniformemente en } A .}$

$\forall x \in A$, $\sum |f_n(x)|$ converge y por tanto $\sum f_n$ converge puntualmente. Sea f su suma.

$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} M_n$$

que se puede hacer tan pequeño como queramos haciendo N suficientemente grande (pues $\sum M_n$ converge). Como tenemos un N independiente del x , S_n converge uniformemente.

[Si no podemos aplicar este criterio no sabremos decir nada sobre la convergencia uniforme de una serie (pero está claro que aunque no consigamos encontrar la $\sum M_n$ convergente, esto no significa que la $\sum f_n$ no converja uniformemente)].

Ej. $\sum \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ es uniformemente convergente en todo $\mathbf{R}$ pues $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

[Sabemos entonces, por ejemplo, que la suma $f(x)$ de esta serie es función continua en todo $\mathbf{R}$].

La serie obtenida derivando término a término: $\sum \frac{\cos nx}{n}$ diverge cuando, por ejemplo, $x = 0$.

[Para otros x , como $x = \pi$, diverge (Leibniz); y para casi todos no sabemos decirlo].

[Como vemos, no se pueden derivar las sumas infinitas, en general, como las sumas finitas; las series de potencias que veremos a continuación sí se podrán derivar término a término].

Ej. Estudiemos ahora la convergencia de $\sum h_n$ con $h_n = \frac{x}{1+n^4x^2}$ (vista hace poco).

Lo que sabíamos de series numéricas nos basta para ver que converge puntualmente $\forall x \in \mathbf{R}$:

si $x = 0$ queda $\sum 0$; si $x \neq 0$, $x \sum \frac{1}{1+n^4x^2}$ converge pues $\frac{1}{1+n^4x^2} \sim \frac{1}{n^4}$ y $\sum \frac{1}{n^4}$ converge.

Para ver si la serie es uniformemente convergente sólo disponemos de Weierstrass.

No saltaba a la vista la serie numérica con la que comparar, pero según hemos probado:

$|h_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}\ \forall x \in \mathbf{R}$ y $\sum \frac{1}{2n^2}$ convergente $\Rightarrow \sum h_n(x)$ converge uniformemente en $\mathbf{R}$.

[Otras propiedades importantes de la convergencia uniforme (que veremos en 5.5) serán las relacionadas con la integración: el límite de las integrales de una sucesión de funciones integrables será la integral del límite cuando haya convergencia uniforme, pero podría no serlo si sólo hay la puntual (y lo mismo sucederá con las series)].

4.3. Series de potencias

A una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ se le llama serie de potencias en $(x-a)$.

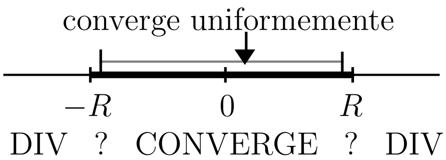
Para cada x que converja la suma de la serie será un número real. Por tanto, define una función $f(x)$ cuyo dominio serán los x para los que converge. Supondremos a partir de ahora, por sencillez, que $a=0$ (en caso contrario haríamos $x-a=t$ y estaríamos en el caso $a=0$):

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}$$ (viene a ser, pues, un 'polinomio infinito')

Una serie de ese tipo siempre converge en $x=0$ (y $f(0)=a_0$), pero no tiene que hacerlo para todo x : ya vimos que la serie $\sum x^n$ converge (y que su suma $f(x)=1/[1-x]$) si y sólo si $|x|<1$. En general, converge en un intervalo centrado en el origen (que puede degenerar en $x=0$ o ampliarse a todo $\mathbf{R}$):

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado **radio de convergencia** de la serie, que, según los casos, tiene las siguientes propiedades:
i) si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$,
ii) si R es un número real positivo, la serie converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$,
iii) si $R=\infty$, la serie converge para todo x .
Además, si $0<x_0<R$, la serie converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$.



En ii), para $x=R$ y $x=-R$ la serie puede converger o divergir. El teorema no dice que la serie converja uniformemente en $(-R,R)$, sino que lo hace en $[-x_0,x_0]$ con x_0 tan cercano a R como queramos).

Comencemos demostrando que:

Si $\sum a_n c^n$ **converge para un** c **entonces** $\sum a_n x^n$ **converge uniformemente en** $[-x_0,x_0]$ **, si** $0<x_0<|c|$ **, y converge puntualmente (y absolutamente) en** $(-|c|,|c|)$:

Como $\sum a_n c^n$ converge $\Rightarrow a_n c^n \to 0$ y por tanto está acotada: $\exists K$ tal que $|a_n c^n| \le K$

$$\Rightarrow \text{si } x\in[-x_0,x_0] \text{ , } |a_n x^n| \le |a_n c^n|\left|\tfrac{x_0}{c}\right|^n \le K\left|\tfrac{x_0}{c}\right|^n .$$

Como $\sum \left|\frac{x_0}{c}\right|^n$ es geométrica convergente ($\left|\frac{x_0}{c}\right|<1$), Weierstrass asegura que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$. Además para todo $x\in(-|c|,|c|)$ existe x_0 con $|x|<x_0<|c|$, con lo que $\sum |a_n x^n|$ converge puntualmente.

Sea $S=\{x : \sum a_n x^n \text{ converge}\}$. Es no vacío ($0\in S$).

Si existe algún $x\notin S$, $|x|$ es cota superior de S (no converge para ningún real mayor por el resultado anterior) y por tanto tiene extremo superior. Veamos que el radio de convergencia R=sup$S$: si $|x|>R$ la serie diverge (si no, existirían puntos de S mayores que R); si $|x|<R$ existe c con $|x|<c<R$ para el que $\sum a_n c^n$ converge (R es cota superior) y por tanto $\sum a_n x^n$ también converge. Si $0<x_0<R$, existe c con $x_0<c<R$ para el que $\sum a_n x^n$ converge y la serie converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$.

Si no existe $x\notin S$, la serie converge $\forall x$: $R=\infty$. Se ve igual que hay convergencia uniforme en todo $[-x_0,x_0]$.

El R lo podremos calcular casi siempre mediante el criterio del cociente o la raíz.

Por ejemplo, si en nuestra serie aparecen todos los x^n (no si es del tipo $\sum a_n x^{2n}$ o $\sum a_n x^{2n+1}$)

se tiene que: $\boxed{R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$, si dichos límites existen o son infinito, pues

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \tfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \; [>1] \Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \tfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \; [\; |x| > \lim_{n\to\infty} \tfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \;]$$

(muy parecido con la raíz).

Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 = R$: la serie sólo converge si $x=0$ (y podemos tirarla a la basura).

Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$ (cociente, desde luego). Converge $\forall x$ (a $f(x) = \mathrm{e}^x$ como veremos).

Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{[-9]^n}{2n+1} x^{2n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9^{n+1}|x|^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{9^n|x|^{2n+1}} = 9|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} = R$.

Si $x = \pm\frac{1}{3}$ la serie que aparece en ambos casos $\sum \frac{[-1]^n}{2n+1}$ también converge (Leibniz).

[No podíamos aplicar las fórmulas recuadradas y hemos tenido que usar directamente el cociente].

Ej. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$. Necesitaríamos la regla de L'Hôpital (o admitir límites ya citados basados en ella):

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$, porque $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$.

Si $x=-1$, $\sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ converge por Leibniz ($\frac{1}{\log n} \to 0$ y decrece porque $\log n$ crece).

Si $x=1$, $\sum \frac{1}{\log n}$ diverge, pues $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge. La serie converge si $x \in [-1,1)$.

[Sin L'Hôpital: converge si $|x|<1$, pues $\frac{|x|^n}{\log n} < |x|^n$ y $\sum |x|^n$ geométrica convergente, y si $|x|>1$, el término general no tiende a 0 (pues si $|x|>1$ es $\log n \ll |x|^n$) y diverge].

Propiedad esencial de las series de potencias es que **se pueden derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia** $|x|<R$ (como si fuesen polinomios):

Teorema:

Sea $R>0$ (finito o infinito) y sea $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x|<R$. Entonces para $|x|<R$:
f es derivable, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge y $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$

[La demostración no la hacemos porque utiliza propiedades no vistas de derivación de series uniformemente convergentes (ver Spivak); en el capítulo 5 veremos que también las series de potencias se podrán integrar término a término en $|x|<R$].

Aplicando el teorema sucesivamente a f', f'', ... obtenemos que para $|x|<R$:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots \; , \; \ldots \; , \; f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) n x^{n-k} = k! a_k + \cdots$$

Así, **una f definida por una serie de potencias es de C^∞ en $|x|<R$ y** $\boxed{f^{(k)}(0) = k!\, a_k}$

Ej. La derivada de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$ [ya dijimos que era e^x].

Ej. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\cdots$. Su radio de convergencia es $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1\Rightarrow$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots,\ f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2}=\frac{1}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x^2}{4}+\cdots,\ \text{si } |x|<1\,.$$

Como $\sum\frac{1}{n^2}$ y $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ convergen, la serie de la f converge en los dos extremos $x=\pm 1$ del intervalo de convergencia. Sin embargo las series de las derivadas tienen peor comportamiento en esos puntos: la de f' converge en $[-1,1)$ y la de f'' lo hace sólo en $(-1,1)$. Pero las funciones definidas por series son 'muy buenas' en $(-R,R)$ (acabamos de ver que tienen infinitas derivadas ahí). El problema fundamental de estas funciones tan buenas es que para hallar sus valores debemos sumar series (y por eso casi siempre nos tendremos que conformar con valores aproximados).

También pueden sumarse, multiplicarse,... las series de potencias como si fuesen polinomios:

Teorema:

Sean $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ si $|x|<R_f$ y $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ si $|x|<R_g$. Entonces si $|x|<\min(R_f,R_g)$:

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n+b_n]x^n\ ,\ f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

[Lo de la suma es consecuencia de las propiedades de series numéricas; lo del producto es más complicado y lo admitimos sin demostración; también se pueden realizar la división f/g (si f/g tiene límite en $x=0$) y la 'composición' de series (veremos ambas cosas en ejemplos)].

Ej. Hallemos de varias formas el desarrollo en serie de potencias de $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{[x+3][x-1]}$.

Sabemos que:

$$\frac{1}{x-1}=-[1+x+x^2+x^3+\cdots]=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{ si } |x|<1\ ,$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-[-\frac{x}{3}]}=\tfrac{1}{3}[1-\tfrac{x}{3}+\tfrac{x^2}{9}-\tfrac{x^3}{27}+\cdots]=\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-x]^n}{3^n} \text{ si } |x|<3\ .$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}\frac{1}{x+3}=-\tfrac{1}{3}\left[1+(1-\tfrac{1}{3})x+(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9})x^2+(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{27})x^3+\cdots\right]$$

$$=-\tfrac{1}{3}-\tfrac{2x}{9}-\tfrac{7x^2}{27}-\tfrac{20x^3}{81}+\cdots\ ,\quad \text{si } |x|<1=\min(1,3)$$

Lo más rápido (descomponiendo en fracciones simples; explotaremos esta idea en las integrales):

$$\frac{1}{[x+3][x-1]}=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\Big]=-\tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\tfrac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^nx^n}{3^n}=-\tfrac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[3+\frac{[-1]^nx^n}{3^n}\Big]x^n$$

Ahora 'dividimos': buscando una serie $\sum c_n$ tal que $[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots][x^2+2x-3]=1$. Igualando las potencias de $x^0,x^1,x^2,\ldots$ vamos obteniendo:

$$x^0:-3c_0=1\Rightarrow c_0=-\tfrac{1}{3}\quad;\quad x^1:2c_0-3c_1=0\Rightarrow c_1=\tfrac{2}{3}c_0=-\tfrac{2}{9}\quad;$$

$$x^2:c_0+2c_1-3c_2=0\Rightarrow c_2=\tfrac{1}{3}c_0+\tfrac{2}{3}c_1=-\tfrac{1}{9}-\tfrac{4}{27}=-\tfrac{7}{27}\quad;\quad\ldots$$

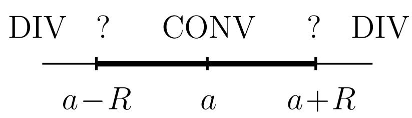
De una forma tampoco nada práctica (pero que sugiere cómo componer series):

$$f(x)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}(2x+x^2)}=-\tfrac{1}{3}[1+\tfrac{1}{3}(2x+x^2)+\tfrac{1}{9}(2x+x^2)^2+\tfrac{1}{27}(2x+x^2)^3+\cdots]$$

Y eligiendo (sin olvidar ningún término) los coeficientes de las sucesivas potencias:

$$f(x)=-\tfrac{1}{3}\left[1+\tfrac{2}{3}x+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{9})x^2+(\tfrac{4}{9}+\tfrac{8}{27})x^3+\cdots\right]$$

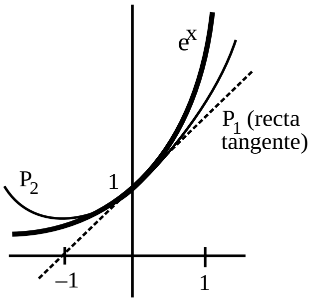
[La teoría para la serie más general $\sum a_n(x-a)^n$, como dijimos, es la misma; el intervalo $|x-a|<R$ de convergencia está ahora centrado en a]



4.4. Polinomios y series de Taylor

¿Cómo hallar, sin calculadora, $\sqrt{\mathrm{e}}$, $\log 2$ ó $\operatorname{sen} 1$? Las funciones más fáciles de evaluar son los polinomios. Si encontramos un polinomio P que se parezca mucho a una función f dada cerca de un punto a (y podemos estimar el error cometido al sustituir f por P), podremos hallar valores aproximados de $f(x)$ para los x próximos a a.

Ej. Sea $f(x)=\mathrm{e}^x$. El polinomio de grado 1 más parecido a f cerca de $x=0$ es la recta tangente: $P_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$.
Observemos que satisface: $P_1(0)=f(0)$; $P_1'(0)=f'(0)$.



Probablemente se parecerá más a e^x el polinomio P_2 de grado 2 que cumpla $P_2(0)=f(0)$; $P_2'(0)=f'(0)$; $P_2''(0)=f''(0)$, es decir,

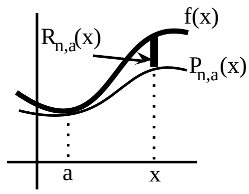
$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\tfrac{f''(0)}{2}x^2=1+x+\tfrac{1}{2}x^2 \,.$$

En general, el polinomio de grado n que mejor aproximará a una función f cerca de $x=a$ será el que coincida con f y con sus n primeras derivadas en a. Se comprueba fácilmente que:

Def. Si f tiene n derivadas en el punto a, el polinomio, de grado $\leq n$,

$$P_{n,a}(x)=f(a)+f'(a)[x-a]+\frac{f''(a)}{2!}[x-a]^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}[x-a]^n$$

cumple $P_{n,a}^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$, para $k=0,..,n$. Al $P_{n,a}$ se le llama **polinomio de Taylor** de f de grado n en a. Llamaremos $R_{n,a}(x)$, **resto** del polinomio de Taylor, al **error** cometido para cada x al sustituir $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$, es decir, $f(x)=P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$.



Es esperable que el $R_{n,a}(x)$ sea pequeño si x es cercano a a y que disminuya al aumentar n. La siguiente expresión del resto, a pesar de venir en función de un c desconocido, nos va a permitir acotar este error en muchas ocasiones:

Teorema (forma de Lagrange del resto):

Si f, f', ... , $f^{(n+1)}$ están definidas en $[a,x]$ (ó en $[x,a]$) entonces
$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}[x-a]^{n+1}$ para algún $c\in(a,x)$ si $x>a$ [ó $c\in(x,a)$ si $x<a$]

[Otras expresiones del resto son útiles, pero se necesitan las integrales. Observemos que si f es un polinomio de grado n se deduce $R_{n,a}=0$, es decir, que, como debía suceder, el polinomio coincide con su polinomio de Taylor de grado n].

Para cada $t\in(a,x)$ tenemos que $f(x)=f(t)+f'(t)[x-t]+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}[x-t]^n+R_{n,t}(x)$.
Miremos el resto como función de t para x dado: $S(t)=R_{n,t}(x)$. Derivando respecto a t:

$$0=f'(t)+(-f'(t)+f''(t)[x-t])+\Big(-f''(t)[x-t]+\tfrac{f'''(t)}{2!}[x-t]^2\Big)$$
$$+\cdots+\Big(-\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}[x-t]^{n-1}+\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n\Big)+S'(t)\ \Rightarrow\ S'(t)=\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n$$

El TVM de Cauchy en $[a,x]$ para $S(t)$ y $g(t)=[x-t]^{n+1}$ implica que $\exists c\in(a,x)$ tal que

$$\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{S'(c)}{g'(c)}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\frac{[x-t]^n}{[x-t]^n}\frac{1}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Como $S(x)=R_{n,x}(x)=0$, $S(a)=R_{n,a}(x)$, $g(x)=0$, $g(a)=[x-a]^{n+1}$ se tiene el resultado.

[Igual si $x<a$]

Normalmente hallaremos los polinomios para $a=0$. En ese caso no escribiremos las a de los subíndices y las expresiones anteriores adoptan la forma (fórmula de **McLaurin**):

Si f, f', ... , $f^{(n+1)}$ existen en $[0,x]$ [ó $[x,0]$] entonces para algún $c\in(0,x)$ [ó $c\in(x,0)$]

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Hallando las derivadas se obtienen fácilmente los siguientes polinomios y restos:

$$e^x=1+x+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}+R_n(x) \text{ con } R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\operatorname{sen}x=x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\tfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+1}(x) \text{ con } R_{2n+1}(x)=\tfrac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$\cos x=1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}-\tfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(x) \text{ con } R_{2n}(x)=\tfrac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

[Para $\operatorname{sen}x$, como la derivada $\operatorname{sen}^{(2n+2)}(0)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen}0=0$, es $P_{2n+1}\equiv P_{2n+2}$; por eso en su resto aparecen $2n+3$ y no $2n+2$; y algo muy parecido sucede con el $\cos x$].

Fijado un x, hay en los tres casos cotas fáciles para el resto en términos de cosas conocidas:

para e^x: si $x>0$, es $|R_n(x)|\le\frac{e^x|x|^{n+1}}{(n+1)!}$; si $x<0$, es $|R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$;

para $\operatorname{sen}x$, $|R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\ \forall x$; para $\cos x$, $|R_{2n}(x)|\le\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \forall x$.

Como vimos en 4.1, una sucesión de la forma $|x|^k/k!\to0\ \forall x$ cuando $k\to\infty$. Por tanto, **podemos aproximar para cualquier x el valor de e^x, $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ con la precisión que queramos utilizando un polinomio de Taylor con n suficientemente grande** (aunque habrá que tomar un n mayor cuanto más lejano de 0 esté el x).

El $\log x$ no está ni definido en $x=0$. Por eso lo que se desarrolla es el $\log(1+x)$. Es fácil ver que la derivada n-sima de esta función es $[-1]^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ y por tanto

$$\log(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\cdots+[-1]^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+R_n(x) \text{ con } R_n(x)=\tfrac{[-1]^n}{n+1}\tfrac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

Se puede probar además (no con esta expresión del resto) que **los polinomios del** $\log(1+x)$ **sólo aproximan a la función si** $-1<x\le1$.

n	n!	2^n
2	2	4
3	6	8
4	24	16
5	120	32
6	720	64
7	5040	128
8	40320	256
9	362880	512
10	3628800	1024

Ej. Calculemos con error menor que 10^{-5} el $\operatorname{sen}1$.

$|R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\Rightarrow|R_{2n+1}(1)|\le\frac{1}{(2n+3)!}<\frac{1}{10000}$ si $2n+3\ge9\Rightarrow$

$\operatorname{sen}1\approx1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}\approx0.84147$ con error $|R_7(1)|\le\frac{1}{9!}<10^{-5}$

Ej. Si aproximamos $\operatorname{sen}2$ con este mismo $P_7(x)$ el error será mayor:

$\operatorname{sen}2\approx2-\frac{8}{6}+\frac{32}{120}-\frac{128}{5040}\approx0.9079$; $|R_7(2)|\le\frac{2^9}{9!}=\frac{4}{2835}\approx0.0014$.

(estas cotas pronto serán más fáciles con las series de Taylor)

Ej. Hallemos ahora $\log\frac{4}{5}=\log(1-\frac{1}{5})$ con error $<10^{-3}$.

Como $\left|R_n(-\frac{1}{5})\right|=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}(1+c)^{n+1}}\underset{-1/5<c<0}{<}\frac{1}{(n+1)5^{n+1}(4/5)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}<\frac{1}{1000}$ si $n\ge3$,

debemos usar el polinomio de grado 3 : $\log\frac{4}{5}\approx-\frac{1}{4}-\frac{1}{50}-\frac{1}{375}\approx-0.224$ con error $<10^{-3}$.

De otra forma (que evitará la acotación del resto en cuanto tengamos las series de Taylor):

$\log\frac{4}{5}=-\log(1+\frac{1}{4})\approx-\frac{1}{5}+\frac{1}{32}-\frac{1}{192}\approx-0.223$, con $\left|R_3(\frac{1}{4})\right|=\frac{1}{4\cdot4^4(1+c)^4}\underset{0<c<1/4}{<}\frac{1}{4^5}<\frac{1}{1000}$

Dada f con infinitas derivadas en 0 su **serie de Taylor** en $x=0$ es: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n}$.

Estas series de potencias son '**polinomios de Taylor de infinitos términos**'; su N-sima suma parcial es el $P_N(x)$. Por tanto, es previsible que una f pueda coincidir con su serie de Taylor (al menos cerca de 0). Como

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n+R_N(x)\,,\ \text{está claro que}\quad \boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\Leftrightarrow R_N(x)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0}$$

$f(x)$ coincide su serie de Taylor en aquellos x para los que el resto tienda a 0 .

Vimos hace poco que el resto $R_N(x)\to 0\ \forall x$ para e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Así pues:

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \ ,\ \ \operatorname{sen} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \ ,\ \ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^{2n}}{(2n)!}}\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}$$

[La serie derivada de la de e^x es ella misma, derivando la de $\operatorname{sen} x$ obtenemos la de $\cos x$ y derivando la de ésta obtenemos la del seno cambiada de signo; observemos también que sólo contiene potencias impares la serie del seno (debe cambiar de signo al cambiar x por $-x$) y pares la del coseno].

Operando con la serie de e^x y la de $e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots$ obtenemos que:

$$\boxed{\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \ ,\ \ \operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}$$

Sabemos que $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ si $|x|<1\Rightarrow\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}[-x]^n$ y $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}[-1]^n x^{2n}$ si $|x|<1$.

Por tanto: $\boxed{\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n}{n+1}\,x^{n+1}\ \ ,\ \ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\ \text{para}\ |x|<1}$

pues las derivadas de estas series son las de arriba y en $x=0$ se anulan funciones y series.

[La serie de $\log(1+x)$ converge también en $x=1$ y la de $\arctan x$ en $x=\pm1$ (ambas tienen $R=1$) lo que no hacen las series derivadas; se puede ver que convergen (lentamente) hacia $\log 2$ y $\pm\arctan 1$:

$$\log 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\cdots\ \ ,\ \ \tfrac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots$$

Parece normal que la serie del $\log(1+x)$ o la de $1/(1+x)$ sólo converjan para $|x|<1$ ya que en $x=-1$ las funciones se van a infinito, pero es sorprendente que lo hagan sólo en ese intervalo las series de $1/(1+x^2)$ o de $\arctan x$ ya que son funciones derivables en todo $\mathbf{R}$. La explicación se tendrá cuando se miren esas series en el plano complejo].

Otra serie muy útil es la de $f(x)=(1+x)^r$, $r\in\mathbf{R}$, que generaliza el binomio de Newton (x^r no es desarrollable en 0):

$$\boxed{(1+x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n\ ,\ \text{con}\ \binom{r}{n}=\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\ ,\ \text{si}\ |x|<1}$$

[en particular se tiene que: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots$, ...]

$$\text{Como: } f'(x)=r(1+x)^{r-1}\ ,\ f''(x)=r(r-1)(1+x)^{r-2}\ ,\ \ldots,$$
$$f^{(n)}(x)=r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n}\ ,\ \ldots,$$

la serie de Taylor es la escrita arriba, y se puede ver que el $R_N\to0$ si $0<x<1$ con la expresión de Lagrange (y con otras expresiones del resto que no hemos estudiado se ve que también lo hace si $-1<x<0$).

De las series de Taylor anteriores podemos deducir muchísimas otras, sin más que sustituir a veces y utilizando otras las operaciones conocidas con series de potencias (muchas veces no podremos dar la expresión del término general de la serie):

Ej. Para escribir el desarrollo de $\operatorname{sen}(3x^2)$ basta cambiar x por $(3x^2)$ en el de $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen}(3x^2) = 3x^2 - \tfrac{9}{2}x^6 + \cdots + (-1)^n \tfrac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{4n+2} + \cdots$$

Ej. $e^{x^2}\operatorname{sen} x = \left[1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots\right]\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right] = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{41}{120}x^5 + \cdots \ , \forall x$.

Ej. $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \cdots$, si $x \geq 0$. [Esta serie representa la función $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ para $x \leq 0$].

Ej. Para hallar el desarrollo de $\tan x$ no conviene utilizar la definición pues las derivadas se complican:

$$f(x) = \tan x \ , \ f'(x) = 1 + \tan^2 x \ , \ f''(x) = 2\tan x + \tan^3 x \ , \ \ldots$$

Es mejor hacer el cociente de las dos series conocidas (tendrá sólo potencias impares):

$$\tfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = c_1 x + c_3 x^3 + \cdots \ ; \ \left[c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots\right]\left[1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots\right] = x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + \cdots$$

$$\Rightarrow x^1 : c_1 = 1 \ ; \ x^3 : c_3 - \tfrac{c_1}{2} = -\tfrac{1}{6} \to c_3 = \tfrac{1}{3} \ ; \ x^5 : c_5 - \tfrac{c_3}{2} + \tfrac{c_1}{24} = \tfrac{1}{120} \to c_5 = \tfrac{2}{15} \ ; \ \ldots$$

Ej. En este ejemplo vamos a hacer nuestra primera 'composición' de series:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\operatorname{sen} x} &= 1 - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^4 x + \cdots \\ &= 1 - [x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots] + [x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots]^2 - [x - \cdots]^3 + [x - \cdots]^4 + \cdots \\ &= 1 - [x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots] + [x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \cdots] - [x^3 - \cdots] + [x^4 - \cdots] + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 - \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

[calcular el cuadrado, cubo,... de una serie es más corto que multiplicarla por sí misma una vez, dos veces,... si se utiliza que $(a+b+c+\cdots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + \cdots$, $(a+b+c+\cdots)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + \cdots , \ldots$]

De cualquier serie de Taylor podemos deducir, truncando la serie, la expresión del polinomio de Taylor (pero sin expresión manejable del resto) por el siguiente

Teorema:

$$\boxed{f(x) = P(x) + x^n g(x) \text{ con } g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow P(x) \text{ es el } P_n \text{ de Taylor de grado } n \text{ de } f.}$$

[es fácil comprobar que coinciden tanto f y P como sus n primeras derivadas en $x = 0$]

Ej. El del polinomio de Taylor de $\arctan x$ es: $P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
pues el resto de la serie es de la forma $x^{2n+1}g(x)$, con $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Los desarrollos en serie de Taylor permiten bastantes veces calcular valores aproximados dando fácilmente cota del error (si aparece una serie de Leibniz; en caso contrario habrá que acudir a la expresión del resto de Lagrange).

Ej. Calculemos $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ con error menor que 10^{-2}. Para $|x| < 1$ sabemos que es:

$$(1+x)^{1/5} = 1 + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{(1/5)(-4/5)}{2}x^2 + \tfrac{(1/5)(-4/5)(-9/5)}{6}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{x}{5} - \tfrac{2x^2}{25} + \tfrac{6x^3}{125} - \cdots$$

Por tanto: $(1 + \frac{1}{2})^{1/5} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} + \frac{3}{500} - \cdots$, serie alternada y decreciente.

Así pues, es $\sqrt[5]{\frac{3}{2}} \approx \frac{27}{25} = 1.08$, con error $< \frac{3}{500} < 10^{-2}$.

[Calcular $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} = (1 - \frac{1}{2})^{1/5}$ nos costaría bastante más esfuerzo, por salir serie no alternada].

Aunque una f sea de C^∞ en todo $\mathbf{R}$ y su serie de Taylor converja $\forall x$ la función puede no coincidir con la serie:

$$f(x) = e^{-1/x^2} \,,\; f(0) = 0 \;.$$

Veremos en la próxima sección que esta f cumple $f^{(n)}(0) = 0 \;\forall n$; así su serie de Taylor es $\sum 0 \cdot x^n = 0$, convergente $\forall x$; pero, evidentemente, no coincide con f salvo en el punto $x = 0$.

Def. f es **analítica** en $x = 0$ si se puede escribir como una serie de potencias en todo un entorno $|x| < r$, $r > 0$.

(deberá, pues, tener al menos infinitas derivadas en $x = 0$). Hemos visto que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^r$ son analíticas en $x = 0$ (las tres primeras coinciden con una serie en todo $\mathbf{R}$, y las últimas en $|x| < 1$). La f de arriba es un ejemplo de función no analítica en 0 a pesar de tener infinitas derivadas en ese punto.

[Más en general, la **serie de Taylor** de una f en un punto a es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; haciendo $x - a = s$, se traslada el problema a una serie de Taylor en torno a $s = 0$.

Una f es **analítica** en $x = a$ si es igual a una serie de potencias en $|x - a| < r$;
e^x lo es, por ejemplo, en cualquier a; $\sqrt{x}$ no lo es en $x = 0$ (pero sí en $x = 1$)...].

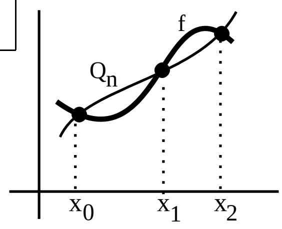
[Acabamos con un tema más bien propio de una asignatura de cálculo numérico, pero que conviene contar aquí para comparar con los polinomios de Taylor. Se usará cuando aproximemos integrales].

Polinomios de interpolación.

El polinomio de Taylor P_n es sólo una de las formas de aproximar una f con un polinomio. El P_n es, como vimos, el que mejor aproxima a f cerca de un punto. Pero muchas veces interesa encontrar un polinomio Q_n que aproxime a f en todo un intervalo. Una de las posibilidades de hacerlo es conseguir un Q_n que tome los mismos valores que f en una serie de puntos del intervalo. A éste polinomio se llama **polinomio de interpolación**. Otra situación en que es útil el polinomio de interpolación es cuando sólo disponemos de unos cuantos valores de la f (por ejemplo, esto sucederá cuando la f sea resultado de unas cuantas medidas experimentales). Es decir:

Def. Dada una función $f(x)$ se llama polinomio de interpolación de grado n para los $n+1$ puntos distintos $x_0, ..., x_n$ al polinomio Q_n que satisface

$$Q_n(x_0) = f(x_0), ..., Q_n(x_n) = f(x_n)$$



Un Q_n arbitrario tiene $n+1$ coeficientes $a_0, ..., a_n$. Se podrían determinar con las $n+1$ ecuaciones lineales $Q_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0...n$, pero veremos formas mucho más cortas de calcular el Q_n. Es fácil ver que Q_n es único: si hubiese otro Q_n^*, la diferencia $Q_n - Q_n^*$ sería un polinomio de grado $\leq n$ con $n+1$ raíces distintas, lo que es imposible.

Hay varias formas de construir el Q_n . Veamos la **fórmula de Newton**. Ponemos Q_n en la forma:

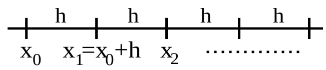
$$\boxed{Q_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})}$$

Sustituyendo ahora sucesivamente $x = x_0$, $x = x_1$,..., $x = x_n$, obtenemos el sencillo sistema

$$\begin{cases} A_0 = f(x_0) \\ A_0 + A_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \\ \cdots \\ A_0 + A_1(x_n - x_0) + \cdots + A_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n) \end{cases}$$

que permite ir calculando los A_k de forma sucesiva y, por tanto, el polinomio de interpolación.

En el caso particular (y muy común) de que los x_k sean **equidistantes** (es decir, $x_{k+1} = x_k + h$) el sistema adopta la forma más simple:



$$A_0 = f(x_0) \ , \ A_0 + hA_1 = f(x_1) \ , \ A_0 + 2hA_1 + 2!h^2A_2 = f(x_2) \ , \ ...,$$
$$A_0 + nhA_1 + \cdots + \tfrac{n!}{(n-k)!}h^kA_k + \cdots + n!h^nA_n = f(x_n) \to$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= f(x_0) \\ A_1 &= \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] \\ A_2 &= \frac{1}{2!h^2}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] \\ A_3 &= \frac{1}{3!h^3}[f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)] \\ &\ \ \cdots \end{aligned}}$$

Otra expresión del Q_n la da la **fórmula de Lagrange**. Llamemos

$$\boxed{\pi_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}$$

Observemos que el polinomio [de grado n] $\dfrac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)}$ vale 1 si $x = x_k$ y vale 0 si $x = x_j$, con $j \neq k$.

Por tanto: $$\boxed{Q_n(x) = f(x_0)\ \frac{\pi_0(x)}{\pi_0(x_0)}\ +...+ f(x_k)\ \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)}\ +...+ f(x_n)\ \frac{\pi_n(x)}{\pi_n(x_n)}}$$

[parece más cómodo aplicar directamente esta fórmula que resolver un sistema, pero su inconveniente principal es que si queremos añadir un nuevo punto hay que volver a calcularse todos los π_k, lo que no sucedía con Newton]

Como en los polinomios de Taylor, aquí también se puede dar una estimación del error cometido al sustituir la f por su polinomio de interpolación Q_n . Admitimos sin demostración que si f es de $C^{n+1}[x_0, x_n]$ se tiene que:

$$\boxed{f(x) - Q_n(x) = \tfrac{1}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f^{(n+1)}(c) \text{ con } c \in (x_0, x_n)}$$

Ej. Hallemos el polinomio de grado 2 que toma los mismos valores que $f(x) = \operatorname{sen} x$ en 0, $\frac{\pi}{2}$ y π .

Sabemos que $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$. Calculando los A_k [$h = \frac{\pi}{2}$] tenemos:

$A_0 = 0$, $A_1 = \frac{2}{\pi}[1-0]$, $A_2 = \frac{2}{\pi^2}[0-2+0] \to Q_2(x) = 0+\frac{2}{\pi}(x-0)-\frac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$

A lo mismo llegamos con: $Q_2(x) = 0\frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{(0-\pi/2)(0-\pi)} + 1\frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} + 0\frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi-0)(\pi-\pi/2)}$

Utilicemos este polinomio para aproximar $\operatorname{sen} 1$ y $\operatorname{sen} 2$:

$Q_2(1) \approx 0.86795$, $Q_2(2) \approx 0.92534$. Los errores cometidos están acotados por

$|E(1)| \leq \frac{1}{24}|1-0||1-\pi/2||1-\pi| \approx 0.05$, $|E(2)| \leq \frac{1}{24}|2-0||2-\pi/2||2-\pi| \approx 0.04$.

Las aproximaciones son peores que las que vimos con el P_7 de Taylor.
Pero son mejores en 2 que las obtenidas con el de orden 5 ($P_5(2)$ =0.9333, $\operatorname{sen} 2$ =0.9093).
Siguen siendo peores en 1, más cercano a 0 ($P_5(1)$ =0.8417, $\operatorname{sen} 1$ =0.8415).

4.5. Cálculo de límites indeterminados

(ya sabemos calcular los otros, finitos o infinitos; pero quedan las indeterminaciones:
$\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0)

Utilizando desarrollos de Taylor (para x tendiendo hacia a **finito**):

Introducimos una notación para abreviar: sea $g(x)\neq 0$ para $x\neq a$ en un entorno de a .

Def. $\boxed{\text{Diremos que } f(x)=o(g(x)) \text{ cuando } x\to a \text{ si } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0}$

Se lee simplemente f es 'o pequeña' de g. Con esta notación podemos expresar los polinomios de Taylor escribiendo sólo aquello que se va a utilizar para calcular límites (la función es el polinomio mas 'algo despreciable'):

$$\boxed{\text{Si } f \text{ es de } C^{n+1} \text{ en un entorno de } a \text{ entonces } f(x)=P_{n,a}(x)+o\left([x-a]^n\right)}$$

(pues entonces $|f^{(n+1)}(c)|\leq K$ para $c\in[a,x]\Rightarrow\left|\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}\right|\leq\frac{K|x-a|}{(n+1)!}\to 0$ si $x\to a$)

Ej. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+o(x)}{x}=1$,

pues $o(x)$ es precisamente algo que dividido por x tiende a 0 cuando x tiende a 0.

Ej. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

En este caso no basta un término del polinomio (no se sabe hacia que tiende $o(x)/x^3$.

[Es habitual (aunque impreciso) escribir unos puntos suspensivos en lugar de utilizar la "o"; si lo hacemos, tengamos en cuenta que esos puntos deben representar las potencias de x estrictamente mayores que las escritas; no escribir ni siquiera los puntos suele conducir a errores, como sustituir simplemente en el último límite $\operatorname{sen} x$ por x (infinitésimo equivalente que dicen algunos) lo que nos puede llevar a decir que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0$!!].

Ej. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{sh} x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)]}{x^4+o(x^4)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{1+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\dfrac{1}{2}$.

Hemos desarrollado hasta que ha quedado un término que no se anulaba en el numerador. También hemos agrupado en $o(x^4)$ todos los términos que no influyen en el valor del límite.

Las indeterminaciones anteriores eran de la forma $\frac{0}{0}$. Muchas de otro tipo se pueden llevar a ella:

Ej. (1^∞) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\log(1+x)/x}=\mathrm{e}$, ya que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+o(x)}{x}=1$.

Ej. $(\infty-\infty)$ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos 2x}{x}-\dfrac{2+\arctan x}{\log(1+2x)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-2x^2+o(x^2)}{x}-\dfrac{2+x+o(x)}{2x-2x^2+o(x^2)}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x^2+o(x^2)-2x-x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)}=-\frac{3}{2}$$

además de agrupar en las $o(x^2)$ los términos que no influyen en el límite, hemos utilizado una serie de propiedades de la "o" de demostración inmediata:

$$x^m=o(x^n) \text{ si } m>n \;\;,\;\; f(x)=o(x^m)\Rightarrow f(x)=o(x^n) \text{ si } m>n \;,$$

$$x^m o(x^n)=o(x^{m+n}) \;\;,\;\; o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})$$

(son muy fáciles de intuir, si pensamos que $o(x^n)$ contienen las potencias de x mayores que n).

La regla de L'Hôpital:

Si $f(x), g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ (ó $\underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$) y existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$.

Lo probamos sólo en uno de los casos: para $f, g \to 0$ cuando $x \to a$, a^+ ó a^- . Para $x-a$ pequeño, definiendo $f(a)=g(a)=0$, f y g son continuas en $[a,x]$ y derivables en (a,x) , y es $g'\neq 0$ en (a,x) [porque existe el límite de f'/g']. Por el teorema del valor medio de Cauchy existe $c\in(a,x)$ con $f(x)g'(c)=g(x)f'(c)$. Como $g(x)\neq 0$ [si fuese $g(x)=0$, por Rolle sería $g'(z)=0$ para algún $z\in(a,x)$] se puede escribir

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ y por tanto $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pues $x\to a^+ \Rightarrow c\to a^+$.

Análogamente se demostraría para $x\to a^-$, de donde se deduciría para $x\to a$.

No dice L'Hôpital que si f'/g' no tiene límite (finito o infinito), tampoco lo tenga f/g :

Ej. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+\cos x} = \dfrac{\infty}{\infty}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2-\operatorname{sen} x}$ no tiene límite, pero es claro que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2+\frac{\cos x}{x}} = \dfrac{1}{2}$

Para calcular un límite indeterminado, **si conocemos los desarrollos** de las funciones que aparecen en la expresión, **suele ser preferible acudir a Taylor**.

Ej. El límite $\infty-\infty$ de la página anterior se complica por L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x \log(1+2x) - 2x - x\arctan x}{\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} 2x\log(1+2x) + \frac{2\cos 2x}{1+2x} - 2 - \arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{\log(1+2x) + \frac{2x}{1+2x}} = \frac{0}{0}$$

y hay que volver a aplicar l'Hôpital para deshacer esta indeterminación y llegar al resultado.

L'Hôpital **se puede aplicar en más ocasiones** que Taylor (cuando $x\to\infty$ y cuando no conocemos los polinomios):

Ej. $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x-\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{(1-\cos x)\cos^2 x} = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x} = -2$

(sin simplificar hubiéramos tenido que volver a usar L'Hôpital pues la indeterminación seguía; pero no nos lancemos a derivar sin comprobar que sigue el $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, pues podríamos hacer burradas como:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \mathbf{!!} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{-2\cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2} \text{).}$$

Aunque no conociésemos el polinomio de Taylor de $\tan x$ podíamos haber buscado otros conocidos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x - x + 16x^3 + o(x^3)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -2$$

Ej. $(0\cdot\infty)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} [x\log(e^x-1)] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(e^x-1)}{1/x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Aplicamos L'Hôpital (Taylor no se puede):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x/(e^x-1)}{-1/x^2} = -1\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{e^x-1} = \left(\tfrac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{e^x} = 0 \text{ (aquí sí hubiera valido Taylor)}$$

Ej. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - \arctan x}{\log(1+x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1/[1+x^2]}{1/(1+x)} =$ " $\frac{\infty - 0}{0^+} = \infty$ "

Debíamos aplicar L'Hôpital (ni $e^x \sim 1+x$, ni $\arctan x \sim x$, ni $\log(1+x)\sim x$ si x gordo).

Un famoso límite $(0\cdot[-\infty])$ típico de L'Hôpital (en 0 el $\log x$ no admite desarrollo de Taylor):

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}[x^a\log x]=0\ ,\ \text{si } a>0} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x^{-a}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-ax^{-a-1}}=\frac{1}{-ax^{-a}}=0$$

Ej. De él se deduce: (0^0) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\log x}=1$

Otros **límites importantes:** $\boxed{\text{Si } a>0\,,\ b>0\,,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\log x)^b}{x^a}=0\ ,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}}=0}$

(en otras palabras $(\log x)^b=o(x^a)$, $x^b=o(\mathrm{e}^{ax})$ si $x\to\infty$, por gordo que sea b y chico que sea a)

En efecto, $\frac{\log x}{x^a}\to\frac{1/x}{ax^{a-1}}\to 0\Rightarrow\frac{(\log x)^b}{x^a}=\left[\frac{\log x}{x^{a/b}}\right]^b\to 0\ ,\ \frac{x}{\mathrm{e}^{ax}}\to\frac{1}{a\mathrm{e}^{ax}}\to 0\Rightarrow\frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}}=\left[\frac{x}{\mathrm{e}^{ax/b}}\right]^b\to 0$

Como dijimos en el capítulo 2, para calcular límites, a veces es conveniente realizar **cambios de variable**. Ya vimos los cambios de este tipo:

Teorema [cambio $t=g(x)$]:

$$\boxed{\text{Si } g \text{ es continua en } a\ ,\ g(x)\neq g(a) \text{ si } x\neq a \text{ y } \lim_{t\to g(a)}f(t)=L\Rightarrow\lim_{x\to a}f(g(x))=L}$$

Otros que se utilizan muchas veces (si aparecen expresiones que dependen de $1/x$) son:

Teorema [cambio $t=\frac{1}{x}$]:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}f(\tfrac{1}{x})=\lim_{t\to 0^+}f(t)\ ,\ \lim_{x\to 0^+}f(\tfrac{1}{x})=\lim_{t\to\infty}f(t)\quad [\text{Análogos con } 0^- \text{ y } -\infty]}$$

[basta escribir las definiciones de los límites para comprobarlo]

Ej. Como aplicación, (∞^0) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\right)^t=1$, pues $\lim\limits_{t\to 0^+}t^t=1$ como vimos arriba.

(O directamente, $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\log x/x}=1$, pues el exponente tiende a 0 como también sabemos).

Ej. También con este teorema: $(\infty\cdot 0)$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}x^2\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}t}{t^2}=1\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=\infty$.

Ej. Más complicado: $(\infty\cdot 0)$ $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\mathrm{e}^{-3/x^2})=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{-3t^2}}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{3t^2+o(t^2)}{t^2}=3$.

Ej. Hallemos ahora, si existen, varios límites para la función $f(x)=\frac{\log(1+x)-x}{\operatorname{sen}x-x}$:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\left(\ \tfrac{0}{0}\ \right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\pm\infty \text{ si } x\to 0^\pm$$

[o L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\cos x-1}=\left(\ \frac{0}{0}\ \right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{[1+x]^2}}{-\operatorname{sen}x}=\pm\infty$ si $x\to 0^\pm$]

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\left(\ \tfrac{-\infty}{-\infty}\ ,\ \text{la } x \text{ manda}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)/x-1}{\operatorname{sen}x/x-1}=\frac{0+1}{0+1}=1\ ,$$

ya que $\log(1+x)/x\to 0$ (casi el límite de arriba; o por L'Hôpital).

[no se podía aplicar Taylor (estamos muy lejos de $x=0$),
ni directamente L'Hôpital, pues $\lim_{x\to\infty}\frac{1/[1+x]-1}{\cos x-1}$ no existe)].

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=$ “$\frac{-\infty+1}{-\operatorname{sen}1+1}=-\infty$” $(1-\operatorname{sen}1>0)$, límite fácil que sabíamos calcular hace tiempo.

Ej. Hallemos para todo valor de a los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} x^a[1-\cos\tfrac{1}{x}] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{t^a} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2/2+o(t^2)}{t^a} = \begin{cases} 0 \text{ si } a<2 \\ 1/2 \text{ si } a=2 \\ \infty \text{ si } a>2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos ax}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{[a^2/2-1]x^2+[1/2-a^4/24]x^4+o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} -\infty \text{ si } a<\sqrt{2} \\ 1/3 \text{ si } a=\sqrt{2} \\ \infty \text{ si } a>\sqrt{2} \end{cases}$$

[en ambos casos, por L'Hôpital sería más largo, habría que discutir varias veces si el límite es o no de la forma $0/0$ y sería mucho más fácil equivocarnos en algún paso]

Con lo aprendido sobre Taylor y límites indeterminados podemos abordar diferentes problemas de secciones anteriores para los que nos faltaban argumentos. Por ejemplo, ahora ya sabemos calcular muchos más límites de **sucesiones** (y deducir convergencias de **series**), gracias a los teoremas que los relacionan con los de funciones. Recordamos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\}\subset \text{dom} f-\{a\} \text{ con } \{a_n\}\to a \text{ satisface que } f(a_n)\to L \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\}\subset \text{dom} f \text{ con } \{a_n\}\to \infty \text{ satisface que } f(a_n)\to L \end{array}}$$

(los teoremas también valían si L era $+$ ó $-\infty$) (en particular, $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} L \Rightarrow f(n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$)

Ej. Si $a>0$, $\frac{\log n}{n^a}\to 0$ porque $\frac{\log x}{x^a}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, como vimos por L'Hôpital (adelantado en sucesiones).

[No es nada elegante aplicar L'Hôpital o Taylor directamente a una sucesión, pues estrictamente hablando una sucesión es una función que sólo toma valores sobre los enteros y claramente no tiene sentido hablar de su derivada; se debe, pues, cambiar la variable n por x para indicar que lo que se deriva es la $f(x)$ que da lugar a la sucesión para los $n\in\mathbf{N}$; el problema es que si uno lo hace 'mal' puede llegar bien al resultado (pero que no olvide que deriva la $f(x)$)].

Ej. $\sqrt[n]{n}\to 1$, pues $\{n\}\to\infty$ y $x^{1/x}\to 1$ cuando $x\to\infty$ (por la misma razón $\sqrt[7n+3]{7n+3}\to 1$).

Ej. $(1+a_n)^{1/a_n}\to$ e si $\{a_n\}\to 0$ pues vimos que $(1+x)^{1/x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ e (también admitido en sucesiones).

Ej. $n^2 \operatorname{sh}\frac{1}{n^2}\to 1$ $\left[\begin{array}{c} \text{pues } \{n^2\}\to\infty \text{ y } \lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sh}\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sh} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t+o(t)}{t}=1 \\ \text{o bien, porque } \{\frac{1}{n^2}\}\to 0 \text{ y, cuando } x\to 0 \text{ , } \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\to 1 \end{array}\right]$

Ej. $n^4-n^6\arctan\frac{1}{n^2}\to\frac{1}{3}$, pues se puede poner como $f(\frac{1}{n^2})$ con $f(x)=\frac{x-\arctan x}{x^3}=\frac{x^3/3+\cdots}{x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{3}$.

Ej. $\sum\arctan\frac{1}{n}$ diverge, pues $\arctan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ (es decir, $\frac{\arctan(\frac{1}{n})}{1/n}\to 1$, pues $\frac{\arctan x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ y $\frac{1}{n}\to 0$).

Ej. $\sum\log(1+\frac{1}{n^2})$ converge, pues $\log(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$ (ya que $\frac{\log(1+x)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ y $\frac{1}{n^2}\to 0$).

Ej. $\sum(-1)^n n^2 e^{-\sqrt{n}}$ converge por Leibniz, pues es alternada, $f(n)=n^2e^{-\sqrt{n}}\to 0$

[porque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=[x=t^2]=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^4}{e^t}=0$, o por L'Hôpital (bastante más largo sin el cambio):

$$x^2/e^{\sqrt{x}}\to 4x^{3/2}/e^{\sqrt{x}}\to 12x/e^{\sqrt{x}}\to 24x^{1/2}/e^{\sqrt{x}}\to 24/e^{\sqrt{x}}\to 0\ ]$$

y es decreciente a partir de un n [ya que $f'(x)=\frac{x}{2}(4-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}<0$ si $x>16$].

También nos han aparecido límites indeterminados en la definición de **derivada**. Aunque con los teoremas de derivación se podían calcular casi todas, quedaban aún algunas que no sabíamos hacer. Ahora ya podemos con Taylor y L'Hôpital:

Ej. Estudiemos si son derivables en $x=0$ las siguientes funciones:

$n(x)=\arctan\frac{1}{x^2}$, con $n(0)=\frac{\pi}{2}$. Haciendo uso del último teorema de 3.2 vimos que $n'(0)=0$.

Ahora directamente: $n'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(\frac{1}{h^2})-\frac{\pi}{2}}{h}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\arctan(t^2)-\frac{\pi}{2}}{1/t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t/[1+t^4]}{-1/t^2}=0$.

$l(x)=\frac{\log(1+x)}{x}$, $l(0)=1$. Como $l(x)=\frac{x+o(x)}{x}\underset{x\to 0}{\to}1$, la función l es al menos continua en $x=0$.

Aunque no va a ser lo más rápido, acudamos a la definición para ver si existe $l'(0)$:

$$l'(0)=\lim_{h\to 0}\tfrac{\log(1+h)/h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\tfrac{\log(1+h)-h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\tfrac{-h^2/2+o(h^2)}{h^2}=-\tfrac{1}{2}$$

¿Existirá también $l''(0)$? Siguiendo con la definición, necesitamos antes hallar $l'(x)$ para $x\neq 0$:

$$l'(x)=\tfrac{x-(1+x)\log(1+x)}{(1+x)x^2}\ \to\ l''(0)=\lim_{h\to 0}\tfrac{2h+(1+h)h^2-2(1+h)\log(1+h)}{2(1+h)h^3}=\cdots=\lim_{h\to 0}\tfrac{4h^3/3+o(h^3)}{2h^3+2h^4}=\tfrac{2}{3}$$

Pero las cosas son mucho más fáciles gracias a los desarrollos de Taylor. Nuestra l es exactamente:

$$l(x)=\tfrac{x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots}{x}=1-\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{3}-\tfrac{x^3}{4}+\cdots\ \text{ para todo } |x|<1 \ .$$

Como está definida por una serie de potencias (o sea, es analítica) es C^∞ y sabemos que:

$$l(0)=1\ ,\ l'(0)=-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{l''(0)}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow l''(0)=\frac{2}{3}\ , ...$$

Otra situación en que serán útiles los temas de este capítulo será en el dibujo de **gráficas**:

Ej. $f(x)=e^{-1/x^2}$, $f(0)=0$. Comprobemos primero, como aseguramos en 4.4, que $f^{(n)}(0)=0\ \forall n$.

Para $x\neq 0$ es: $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$, $f''(x)=[\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}]e^{-1/x^2}$, $f'''(x)=[\frac{8}{x^9}-\frac{36}{x^7}+\frac{24}{x^5}]e^{-1/x^2}$, ...

Entonces: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}}{h}$, $f'(0)=\lim\limits_{t\to\infty}te^{-t^2}=0$, $f''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2e^{-1/h^2}}{h^4}=\lim\limits_{t\to\infty}2t^4e^{-t^2}=0$, ...

[pues e^{t^2} es aún mucho mayor que e^t ($e^t/e^{t^2}=e^{t-t^2}\underset{t\to\infty}{\to}e^{-\infty}=0$) y sabemos que $t^ne^{-t}\underset{t\to\infty}{\to}0$]

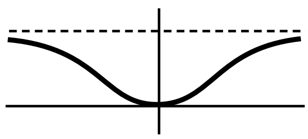
Para cualquier n , tras hacer $h=\frac{1}{t}$, acabaremos en: $f^{(n)}(0)=\lim\limits_{t\to\infty}(\text{polinomio})\cdot e^{-t^2}=0$.

Para hacer el dibujo observamos que: f es par.

f crece para $x>0$ y decrece si $x<0$.

Hay puntos de inflexión si $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$f\to e^0=1$ cuando $x\to\pm\infty$.



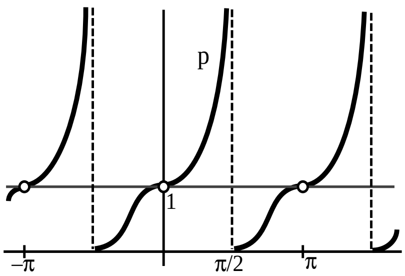
Ej. $p(x)=\cos 2x\,e^{\tan x}$, π-periódica. Continua si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$p'(x)=[1-\operatorname{sen}^2 x]\,e^{\tan x}\geq 0$ ($k\pi$ inflexión horizontal).

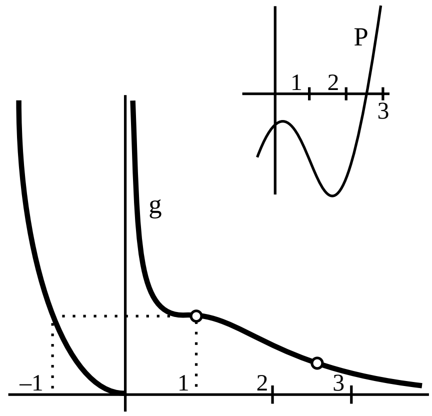
$p\underset{x\to\pi/2^+}{\to}0\cdot 0=0$, $p'\underset{x\to\pi/2^+}{\to}1\cdot 0=0$, $p\underset{x\to\pi/2^-}{\to}0\cdot\infty$:

L'Hôpital: $\dfrac{e^{\tan x}}{1+\tan^2 x}\underset{\infty/\infty}{\longrightarrow}\dfrac{e^{\tan x}}{2\tan x}\underset{\infty/\infty}{\longrightarrow}\dfrac{e^{\tan x}}{2}\underset{x\to\pi/2^-}{\longrightarrow}\infty$

[o bien, $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\dfrac{e^{\tan x}}{1+\tan^2 x}\underset{t=\tan x}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^t}{1+t^2}=\infty$]



Ej. $g(x)=x^2\mathrm{e}^{1/x}\mathrm{e}^{-x}$. $g(x)\geq 0\ \forall x$.



Asíntotas: si $x\to 0^-$, $g\to 0\cdot 0\cdot 1=0$;

si $x\to-\infty$, $g\to\infty\cdot 1\cdot\infty=\infty$;

si $x\to 0^+$, $g\to 0\cdot\infty\cdot 1$ indeterminado:

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g=1\cdot\lim_{t\to\infty} t^{-2}e^{t}=\infty$;

si $x\to\infty$, $g\to\infty\cdot 1\cdot 0$ indeterminado:

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g=1\cdot\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$.

$g'(x)=-[x-1]^2\mathrm{e}^{1/x}\mathrm{e}^{-x}$ siempre decreciente

($x=1$ punto de inflexión con tangente horizontal);

$g'(x)\to 0$ si $x\to 0^-$; $g'(x)\to-\infty$ si $x\to 0^+$.

$g''(x)=\frac{1}{x^2}[x-1][x^3-3x^2+x-1]\mathrm{e}^{1/x}\mathrm{e}^{-x}$

Analizamos el número de raíces de $P(x)=x^3-3x^2+x-1$: $\begin{array}{l}+-+-\ \text{(3 ó 1 positivas)}\\ ----\ \text{(sin raíces negativas)}\end{array}$

$P'(x)=3x^2-6x+1=0$ si $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $P\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Big)=-2+\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<0$

$\Rightarrow$ sólo 1 cero real de P [en $(2,3)$] $\Rightarrow$ 2 puntos de inflexión de g

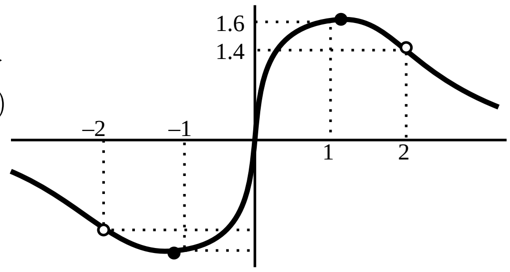
Los únicos valores sencillos: $g(-1)=g(1)=1$, $g'(-1)=-4$.

Ej. $h(x)=x\log\big(1+\frac{4}{x^2}\big)$. Impar. $\displaystyle\lim_{x\to 0} h=\lim_{x\to 0}\frac{\log[1+4/x^2]}{1/x}=(\text{L'H})=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{x^2+4}=0$.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} h=(\text{L'H})=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x^2+4}=0$ [o bien $(x=1/t)$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log[1+4t^2]}{t}=\lim_{t\to\infty}\big[4t+\frac{o(t^2)}{t}\big]=0$;

o (informal) $h\underset{\text{x gordo}}{\sim} x\frac{4}{x^2}=\frac{4}{x^2}$, pues $\log(1+\bullet)\sim\bullet$ si $\bullet$ chico].

$h'(x)=\log\big(1+\frac{4}{x^2}\big)-\frac{8}{x^2+4}$; $h'(x)\underset{x\to 0^+}{\to}\infty$.



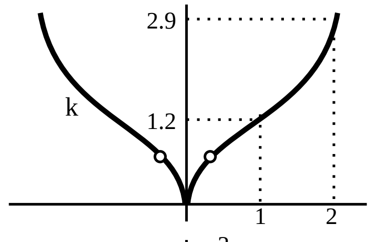
$h'(1)=\log 5-\frac{8}{5}\approx 0.01$, $h'(2)=\log 5-1\approx-0.3\to$

existe un único máximo (en un x algo mayor que 1)

$h''(x)=\dfrac{8[x^2-4]}{x[x^2+4]^2}$ $\begin{array}{l}h\text{ es }\cup\text{ en }(-2,0)\cup(2,\infty)\\ h\text{ es }\cap\text{ en }(-\infty,2)\cup(0,2)\end{array}$

$h(1)=\log 5\approx 1.61$, $h(2)=2\log 2\approx 1.4$.

Ej. $k(x)=\dfrac{\operatorname{sh}x}{x^{1/3}}$. Par. $k\to\infty$ si $x\to\infty$.



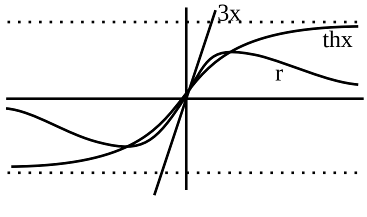
$k(x)=x^{2/3}+o(x^{2/3})\Rightarrow$ continua en $x=0$ si $k(0)=0$

(y no derivable; o directamente $k'(0^+)=\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{\operatorname{sh}h}{h^{4/3}}=\infty$).

$k(\pm 1)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}]\approx 1.2$, $k(\pm 2)=2^{-4/3}[\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}]\approx 2.9$

$k'(x)=x^{-1/3}\operatorname{ch}x-\frac{1}{2}x^{-4/3}\operatorname{sh}x=0\Leftrightarrow\operatorname{th}x=3x$ (nunca)

$k''(x)=\dfrac{[9x^2+4]\operatorname{sh}x}{9x^{7/3}}-\dfrac{2\operatorname{ch}x}{3x^{4/3}}=0\Leftrightarrow\operatorname{th}x=\dfrac{6x}{9x^2+4}\equiv r(x)$



Vemos si se cortan las gráficas de r y th [impares]:

$r'(0)=\frac{3}{2}$, $r(\frac{1}{3})=0.4$, $r(\frac{2}{3})=0.5$ (máximo de r), $r\underset{x\to\infty}{\to}0$,

$\operatorname{th}'(0)=1$, $\operatorname{th}(\frac{1}{3})\approx 0.32$, $\operatorname{th}(\frac{2}{3})\approx 0.58$, $\operatorname{th}\underset{x\to\infty}{\to}1$

$\Rightarrow$ hay un punto de inflexión para un $x\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.