

# 5. Integración en R

## 5.1. Definición y propiedades

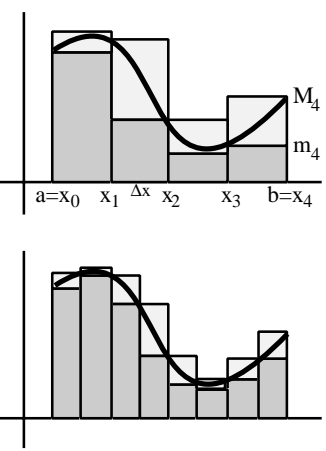
Sea  $f$  acotada en  $[a, b]$ . Dividamos  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de la misma longitud  $\Delta x$  por medio de  $n + 1$  puntos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ con } x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \equiv \Delta x$$

y hagamos para cada  $n$  las llamadas sumas inferior  $L_n$  y superior  $U_n$ :

$$L_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x; U_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x, \text{ con } m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

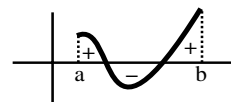
Si las dos sucesiones  $\{L_n\}$  y  $\{U_n\}$  convergen hacia un mismo límite, decimos que  $f$  es **integrable** en  $[a, b]$ , representamos ese límite común por  $\int_a^b f$  ó  $\int_a^b f(x)dx$  y le llamamos **integral** de  $f$  en  $[a, b]$ .



[Esta no es la definición de ‘integral de Riemann’ habitual (ver Spivak), pero es mucho más corta].

El significado geométrico es claro: **si  $f \geq 0$ , la integral ( $\geq 0$ ) representa el área  $A$  de la región limitada por la gráfica de  $f$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$** :  $A$  es para todo  $n$  mayor que la suma  $L_n$  de las áreas de los rectángulos pequeños y menor que la suma  $U_n$  de los grandes; al crecer  $n$ , ambas sumas se aproximan hacia  $A$ . Si  $f \leq 0$ , los  $L_n$  y  $U_n$  son negativos. La integral ( $\leq 0$ ) en valor absoluto es el área de la región (situada bajo el eje  $x$ ) limitada por el eje  $x$ , la gráfica de  $f$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .

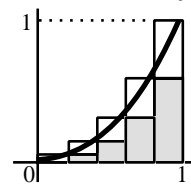
Si  $f$  es positiva y negativa, la integral representará la **diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje  $x$** :



Con los teoremas que veremos, para saber si  $f$  es integrable y para calcular la integral no necesitaremos usar la definición casi nunca. Por ahora, con lo visto, estudiemos unos ejemplos:

**Ej.**  $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ .

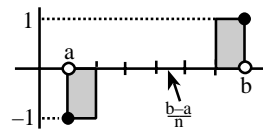
$$L_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [0^2 + \dots + (n-1)^2] \\ U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [1^2 + \dots + n^2]$$



Usando el resultado que vimos en un problema de sucesiones:

$$1^2 + \dots + n^2 = \frac{n[n+1][2n+1]}{6}; L_n = \frac{[n-1]n[2n-1]}{6n^3}, U_n = \frac{n[n+1][2n+1]}{6n^3}; L_n, U_n \rightarrow \frac{1}{3} = \int_0^1 f.$$

**Ej.**  $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x = b \end{cases}$ .  $L_n = -\frac{b-a}{n}, U_n = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \int_a^b g = 0$ .



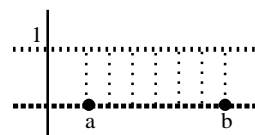
La función es discontinua, pero integrable. Se ve que la integral seguiría siendo nula si cambiamos el valor 0 por cualquier otro en un número finito de puntos de  $(a, b)$ .

Veremos pronto que las funciones acotadas con un número finito de discontinuidades son siempre integrables, así que las funciones no integrables tienen que ser tan patológicas como la siguiente.

**Ej.**  $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}, x \in [a, b]$ . En cada  $[x_{k-1}, x_k], \forall n$ , hay racionales e irracionales.

Así pues,  $L_n = \sum_{k=1}^n 0 \frac{b-a}{n} = 0, U_n = \sum_{k=1}^n 1 \frac{b-a}{n} = b-a \forall n \Rightarrow h$  no es integrable.

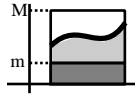
(hay extensiones del concepto de integral:  $h$  sí es ‘integrable Lebesgue’ y su integral en dicho sentido es 0 [hay muchos más irracionales que racionales]).



Las siguientes propiedades son intuitivamente claras a la vista del significado geométrico de la integral y se demuestran mecánicamente usando de las definiciones:

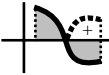
**Teorema:**

Sean  $f$  y  $g$  integrables en  $[a, b]$ . Entonces:  $\int_a^b cf = c \int_a^b f$ ,  $c \in \mathbf{R}$ ;  $\int_a^b [f + g] = \int_a^b f + \int_a^b g$ .



Si  $m \leq f \leq M$  en  $[a, b] \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$ .

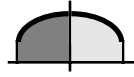
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$



Si  $f \leq g$  en  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

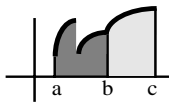


Si  $f$  es impar  $\int_a^b f = 0$ .



Si  $f$  es par  $\int_a^b f = 2 \int_a^b f$ .

[las dos primeras propiedades se expresan diciendo que ‘la integral es lineal’ (como la derivada)]



La próxima sigue siendo intuitiva, pero es pesada de demostrar con nuestra definición (ver libros). [Para  $f$  continua será trivial usando los teoremas de 5.2, pero la propiedad es cierta también para  $f$  integrable y discontinua].

**Teorema:**

Sean  $a < c < b$ ;  $f$  integrable en  $[a, b] \Rightarrow f$  integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , e  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .  
Definiendo  $\int_a^a f = 0$  y  $\int_a^b f = -\int_b^a f$ , la igualdad es válida para  $a, b, c$  cualesquiera.

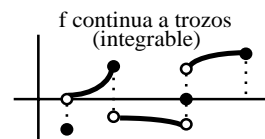
Los dos siguientes teoremas nos dicen que las funciones (acotadas) no integrables son extrañas:

**Teorema:**  $f$  continua en  $[a, b] \Rightarrow f$  integrable en  $[a, b]$

Idea de la demostración. Se puede probar que  $\{L_n\}$  y  $\{U_n\}$  siempre convergen (sus límites respectivos se llaman integral inferior y superior de  $f$ ) y así  $f$  será integrable si  $U_n - L_n \rightarrow 0$ . Sabemos que  $f$  es uniformemente continua: la diferencia entre dos valores cualesquiera de la  $f$  en dos  $x, y \in [a, b]$  es tan pequeña como queramos si  $x$  e  $y$  son suficientemente próximos; en particular, lo es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de  $f$  en  $[x_{k-1}, x_k]$ , si el intervalo es muy pequeño. Así, si  $n$  es suficientemente grande tenemos que para cada  $k$ :

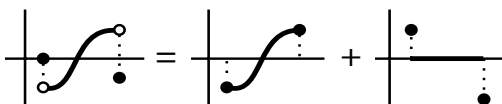
$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall \varepsilon \Rightarrow U_n - L_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x < \varepsilon \text{ para } n \text{ grande} \Rightarrow U_n - L_n \rightarrow 0$$

Ya vimos que funciones discontinuas podían ser integrables. Una  $f$  se dice **continua a trozos** en  $[a, b]$  si es continua salvo en un número finito de puntos y en ellos posee límites laterales.



[No lo son las funciones  $\frac{1}{x}$  o  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  en  $[0, 1]$ , definámoslas como las definamos en  $x = 0$ ]

**Teorema:**  $f$  continua a trozos en  $[a, b] \Rightarrow f$  integrable en  $[a, b]$



[dividimos en subintervalos de forma que  $f$  sólo tenga discontinuidades en los extremos; en cada intervalo es fácil ver que es integrable por ser suma de una función continua y de otra integrable del tipo de la  $g$  de los ejemplos].

Como es 0 el valor de la integral de una función como la  $g$  se ve que **cambiando el valor de una  $f$  integrable en un número finito de puntos, la nueva función  $h$  continúa siendo integrable y el valor de la integral es el mismo**, pues dicha función  $h$  se puede escribir como  $f + g$  con una  $g$  de esas y sabemos que la integral es lineal.

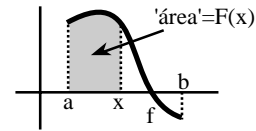
[Hay funciones integrables con infinitas discontinuidades; por ejemplo, una  $f$  creciente y acotada es integrable (pues  $M_{k-1} = m_k, k = 1, \dots, n \Rightarrow U_n - L_n = \frac{f(b)-f(a)}{n}$ ), aunque presente infinitos saltos].

## 5.2. Teoremas fundamentales

Estos **teoremas fundamentales del cálculo infinitesimal** relacionan las derivadas y las integrales y nos permitirán hallar muchísimas integrales prescindiendo de la definición.

Sea  $f$  acotada e integrable en  $[a, b]$ ; para cada  $x \in [a, b]$  la  $\int_a^x f$  existe (y es un número). Podemos, pues, definir una nueva función:

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$



**Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal:**

$$\begin{aligned} f \text{ integrable en } [a, b] &\Rightarrow F \text{ continua en } [a, b]. \\ \text{Si además } f &\text{ es continua en un } c \in (a, b) \text{ entonces } F \text{ es derivable en } c \text{ y } F'(c) = f(c). \end{aligned}$$

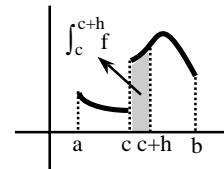
(y por tanto, si  $f$  es continua en todo  $[a, b]$  entonces  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ )

Como  $f$  es acotada en  $[a, b]$ , existen el supremo y el ínfimo de  $f$  en cada intervalo  $\subset [a, b]$ .

Sea  $c \in (a, b)$  y sea  $h > 0$ . Llamemos:

$$M_h = \sup\{f(x) : x \in [c, c+h]\}, \quad m_h = \inf\{f(x) : x \in [c, c+h]\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } m_h h &\leq \int_c^{c+h} f = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = F(c+h) - F(c) \leq M_h h \\ &\Rightarrow [F(c+h) - F(c)] \rightarrow 0, \text{ si } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

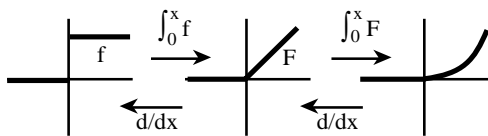


Así pues,  $F$  es continua en  $c$  (cambiando detalles se vería para  $h \rightarrow 0^-$ ).

Sea ahora  $f$  continua en  $c$ . Si  $h > 0$  se deduce que:  $m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h$

(y a la misma igualdad se llegaría, de forma análoga, para  $h < 0$ ).

Como  $f$  es continua en  $c$ ,  $M_h, m_h \rightarrow f(c)$  cuando  $h \rightarrow 0$ , y por tanto  $\frac{F(c+h)-F(c)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(c)$ .



[El teorema nos dice que, al contrario que al derivarla, la  $F$  obtenida integrando  $f$  es 'más suave' que ella. Si  $f$  es discontinua en  $c$ ,  $F$  es continua en  $c$  (aunque  $F$  tenga un 'pico' en  $c$ ); y si  $f$  tiene picos, desaparecen al integrarla. En general,  $f \in C^n \Rightarrow F \in C^{n+1}$ ].

**Ej.**  $f(x) = e^{\text{sen}(chx)}$  continua  $\forall x \Rightarrow F(x) = \int_0^x f, G(x) = \int_7^x f, \dots$  tienen por derivada  $f(x) \forall x$ .

[ $F'(x) = f(x)$  también para  $x < a$  (si  $f$  continua en  $x$ ), pues si  $c < x$  con  $f$  integrable en  $[c, a]$ :

$$F(x) = \int_a^x f = \int_c^x f - \int_c^a f].$$

**Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal:**

$$\text{Si } f \text{ es continua en } [a, b] \text{ y } f = g' \text{ para alguna función } g \text{ entonces } \int_a^b f = g(b) - g(a) \equiv [g]_a^b$$

Como  $F' = f = g' \Rightarrow F(x) = g(x) + k$  para algún número  $k$ . Como  $0 = F(a) = g(a) + k \Rightarrow k = -g(a) \Rightarrow F(x) = g(x) - g(a)$ . En particular:  $F(b) = \int_a^b f = g(b) - g(a)$ .

Dada una función  $f$ , una  $g$  cuya derivada sea  $f$  se llama **primitiva de  $f$** . El segundo teorema dice que **para calcular la integral de una  $f$  continua basta hallar una primitiva de  $f$**  (y no es necesario utilizar las sumas superiores e inferiores). Si  $g$  es primitiva de  $f$ , es claro que **cualquier otra primitiva de  $f$  es de la forma  $g + K$** .

El conjunto de todas las primitivas se designa por  $\int f(x)dx$

(que son funciones y no un número como  $\int_a^b f$ ; a veces se llama integral definida de  $f$  entre  $a$  y  $b$  a esta última, e integral indefinida al conjunto de primitivas).

**En algunos casos, hallar la primitiva de una  $f$  es inmediato** y, por tanto, lo es calcular algunas integrales. Por ejemplo, es ahora ya trivial calcular la primera integral vista en 5.1:

**Ej.**  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$  pues  $\frac{x^3}{3}$  es una primitiva de  $x^2$  ya que  $\frac{d}{dx} \frac{x^3}{3} = x^2$  ;

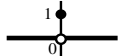
(todas las primitivas de  $x^2$  son  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + K$  ; si para el cálculo de esta integral hubiésemos tomado otro valor de la  $K \neq 0$ , habríamos, desde luego, obtenido el mismo resultado).

Pero en muchas ocasiones calcular primitivas es muy complicado. Más aún, **hay funciones** de apariencia sencilla para las que se demuestra **que no tienen primitivas que puedan escribirse como suma, producto, composición,... de funciones elementales**, como:

$$\int \sin x^2 dx, \int e^{x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\log x}, \int \sqrt{1+x^3} dx, \int \sqrt[3]{1+x^2} dx, \dots$$

**Si  $f$  es continua una primitiva suya es la  $F$**  (pero esto no sirve para calcular una integral concreta); así  $F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ ,  $F^*(x) = \int_{-1}^x \sin t^2 dt$ , ... son primitivas de  $\sin x^2$  ; es decir,  $\int \sin x^2 dx = \int_a^x \sin t^2 dt + K$ . Las variables  $x, t, \dots$  son mudas, pero no se repite la letra del límite de integración en el integrando porque podría dar lugar a errores:  $F(1)$  es  $\int_0^1 \sin t^2 dt$  pero no es  $\int_0^1 \sin 1 dx$  y a esto nos podría llevar la incorrecta notación  $\int_0^x \sin x^2 dx$ .

También hay **funciones integrables sin primitivas** (claramente no pueden ser continuas):

**Ej.**  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$   no tiene primitiva ( $F(x) = \int_a^x f = 0 \forall x$  no lo es)

De los TFCI se deducen las propiedades que habíamos adelantado para el  $\boxed{\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}}$  :

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ continua si } x > 0 \Rightarrow F(x) = \log x \text{ derivable (y continua) si } x > 0 \text{ y } F'(x) = \frac{1}{x}.$$

[De la definición también se pueden deducir las otras propiedades:  $\log(ab) = \log a + \log b, \dots$ ]

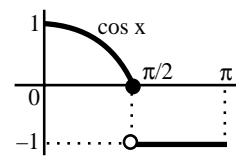
El segundo TFCI permite también probar con facilidad algunas de las propiedades generales de las integrales vistas en 5.1, en el caso particular de que el integrando sea **continuo**; por ejemplo, si  $F$  y  $G$  son primitivas de  $f$  y  $g$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f + g] &= [F + G](b) - [F + G](a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b f &= F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f + \int_c^b f, \dots \end{aligned}$$

Pero recordemos que también son ciertas estas propiedades para las funciones **continuas a trozos**. De hecho, sabemos hallar ya fácilmente integrales de muchas  $f$  de ese tipo, dividiendo el intervalo y aplicando los TFCI en cada subintervalo:

**Ej.** Hallemos  $\int_0^\pi f$ , si  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -1, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^\pi [-1] dx = [\sin x]_0^{\pi/2} + [-x]_{\pi/2}^\pi = 1 - \frac{\pi}{2}. \\ \text{[pues } \int_{\pi/2}^\pi f &= \int_{\pi/2}^\pi [-1] dx \text{, ya que coinciden salvo en } x = \frac{\pi}{2} \text{]} \end{aligned}$$



También sabemos hallar  $\forall x \in [0, \pi]$  la primitiva:

$$\int_0^x f = \begin{cases} \int_0^x \cos t dt, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \int_0^{\pi/2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^x [-1] dt, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 + \frac{\pi}{2} - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[función que, como nos aseguraba el primer TFCI, es continua también en  $x = \pi/2$ ]

Como sabemos hallar derivadas de funciones definidas por integrales, sabemos hacer con ellas todo lo visto en cálculo diferencial: tangentes, máximos y mínimos, límites indeterminados,...

**Ej.** Hallemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4-4}$  en  $x = 1$ :

$$F'(x) = \frac{x^3}{x^4-4}, F'(1) = -\frac{1}{3}; F(1) = \int_{-1}^1 \frac{t^3}{t^4-4} dt = 0 \text{ (integrando impar)} \Rightarrow \text{tangente: } y = -\frac{x-1}{3}.$$

[podríamos (primitiva inmediata), pero no es útil, calcular la  $F(x) = \frac{1}{4} \log|x-4| - \log 3$ ]

**Ej.** Determinemos, si existe, el límite de  $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|\cos t^3|}{t^2+1} dt$  cuando  $x \rightarrow 0$  y cuando  $x \rightarrow \infty$ .

El numerador  $F = \int_0^x$  es continuo y derivable  $\forall x$  (el integrando es continuo) y es  $F(0) = \int_0^0 = 0$ . Cuando  $x \rightarrow 0$  tenemos indeterminación  $0/0$ . Por L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} = 1.$$

Si  $x \rightarrow \infty$ , tal vez no valga L'Hôpital (¿tendrá  $f$  a  $\infty$ ?). De hecho, no hay indeterminación, pues vamos a ver (aunque la primitiva sea no calculable) que  $F$  está acotada. En efecto:

$$0 \leq \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \forall x \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1} = \arctan x \forall x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} G \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0 \Rightarrow G \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

En ocasiones hay que trabajar con funciones similares a la  $F(x)$ , definidas por integrales de funciones  $f$  continuas, pero con límites de integración que son también funciones (derivables) de  $x$ . Los TFCE también nos permiten derivarlas:

Si  $H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f$  entonces  $H'(x) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$

(para los  $x$  tales que  $f$  sea continua en  $[a(x), b(x)]$ ) (o en  $[b(x), a(x)]$  si  $a(x) > b(x)$ )

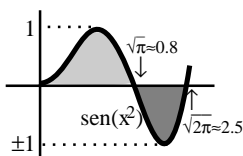
[Basta escribir  $H(x) = \int_0^{b(x)} f - \int_0^{a(x)} f = F[b(x)] - F[a(x)]$ , con  $F(x) = \int_0^x f$ , y aplicar la regla de la cadena].

**Ej.** Utilicemos la fórmula anterior para hallar dos derivadas de la función:  $K(x) = x \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt$ .

$$K'(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt + x[e^{-9x^2} \cdot 3 - e^{-4x^2} \cdot 2] \rightarrow K''(x) = 2[3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}] + 2x^2[8e^{-4x^2} - 27e^{-9x^2}]$$

[expresiones válidas  $\forall x$ , tanto si es positivo como negativo]

**Ej.** Estudiemos para qué  $x$  del intervalo  $[0, 2\pi]$  posee un máximo la función:  $H(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ .



Su derivada es  $H'(x) = \sin[(\sqrt{x})^2] \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0$ .

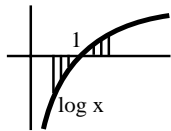
El máximo de  $H$  existe por ser continua. Los candidatos son los extremos y los puntos en que  $H' = 0$ , es decir,  $x = 0$ ,  $x = \pi$  y  $x = 2\pi$ . Con el signo de  $H'$  se ve que  $H$  crece antes de  $\pi$  y decrece después, luego en ese punto se alcanza el máximo. [No era necesario calcular  $H'$  para decirlo: estaba claro viendo la gráfica de  $f(x) = \sin x^2$ , pues hasta  $x = \pi$  vamos añadiendo áreas positivas y a partir de entonces quitamos áreas por debajo del eje  $x$ ].

Distinguir cuál de los mínimos locales es el absoluto exige saber cuál de estos números es menor:

$$H(0) = 0 \quad \text{ó} \quad H(2\pi) = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(t^2) dt$$

La gráfica de la  $f$  sugiere que  $H(2\pi) > 0$ , pero no podemos calcular el valor exacto, por no existir la primitiva de  $f$  (ya aprenderemos a aproximar numéricamente las integrales en la sección 5.5).

**Ej.** Probemos que  $L(x) = \int_{1-x}^{1+x} \log t dt$  es decreciente en  $[0, \frac{1}{2}]$ . Como  $\log x$  es continua en  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  (valores en los que integramos si  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ) podemos derivar la  $L$  ahí:



$$L'(x) = \log(1+x) \cdot 1 - \log(1-x) \cdot [-1] = \log[1-x^2] < 0 \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Era esperable: las áreas negativas que aparecen son mayores que las positivas. En este caso la primitiva sí sería calculable (por partes, como veremos), pero es un rodeo tonto hallar primitivas para derivarlas a continuación.

**Ej.** Precisar para todo  $n \in \mathbf{N}$  en qué  $x \geq 0$  alcanza su valor máximo la función  $f_n(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^3+6n^6}$ , y probar que la serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente en  $[0, \infty)$ .

Como la función  $\frac{1}{x^3+6n^6}$  es continua para todo  $x \geq 0$ , es  $f_n(x)$  derivable y su derivada es:

$$f'_n(x) = \frac{2}{8x^3+6n^6} - \frac{1}{x^3+6n^6} = \frac{3(n^6-x^3)}{(4x^3+3n^6)(x^3+6n^6)}$$

La derivada se anula únicamente si  $x = n^2$ . Como el denominador es siempre positivo, la derivada es positiva cuando  $x < n^2$  y negativa cuando  $x > n^2$ , tiene  $f_n(x)$  un máximo local para  $x = n^2$ .

[Hallar  $f''_n$  es más largo:  $f''_n(x) = \frac{-12x^2}{(4x^3+3n^6)^2} + \frac{3x^2}{(x^3+6n^6)^2} \Rightarrow f''_n(n^2) = -\frac{12}{49n^8} + \frac{3}{49n^8} = -\frac{9}{49n^8}$ ]

La función  $f_n(x) \geq 0$  para  $x \geq 0$  (el integrando es positivo) y su valor máximo en esa semirrecta lo podemos acotar sin dificultad:

$$f_n(n^2) = \int_{n^2}^{2n^2} \frac{dt}{t^3+6n^6} \leq \int_{n^2}^{2n^2} \frac{dt}{6n^6} = \frac{1}{6n^4} \quad [\text{o bien } f_n(n^2) \leq \int_{n^2}^{2n^2} \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8n^4}]$$

(sabríamos hallar el valor exacto de  $f_n(n^2)$ , con algún esfuerzo, después de la próxima sección).

Como  $0 \leq f_n(x) \leq f_n(n^2) \leq \frac{1}{6n^4} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{6n^4}$ ,  $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^4}$  converge,

el criterio de Weierstrass asegura que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente en  $[0, \infty)$ .

### 5.3. Cálculo de primitivas

**Primitivas inmediatas** (o casi inmediatas).

Cada derivada conocida nos proporciona una fórmula de integración:

**Ej.**  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$  ,  $\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$  ,  $\int \frac{dx}{[4-x]^2} = \frac{1}{4-x}$  ,  $\int \frac{2x dx}{x^2-1} = \log|x^2-1|$  , ...

(más exacto sería escribir  $\tan x + K$  ,  $\operatorname{ch} x + K$  , ... ; no lo haremos pero tengámoslo en cuenta)

Normalmente al integrando le faltarán constantes que se podrán calcular derivando de cabeza:

**Ej.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(3x)$  ,  $\int x^{-5/3} dx = -\frac{3}{2} x^{-2/3}$  ,  $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{4[1+(x/2)^2]} = \frac{1}{2} \operatorname{arctan} \frac{x}{2}$  , ...

De la **linealidad** de la derivada se deduce inmediatamente para las primitivas que:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \text{ , } \int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

**Ej.**  $\int [5\sqrt{x+6} + 2 \operatorname{sen} x - 7^x] dx = 4 \int \sqrt{x+6} dx + 5 \int \operatorname{sen} x dx - \int 7^x dx = \frac{8}{3} [x+6]^{3/2} - 5 \cos x - \frac{7^x}{\log 7}$

Es falso que la integral de un producto sea el producto de las integrales por no serlo la derivada, pero de la fórmula del producto  $(fg)' = fg' + f'g$  obtenemos:

**Integración por partes:** Sean  $f'$  y  $g'$  continuas (para que existan las primitivas). Entonces:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \text{ ; } \int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Esto reduce el problema a calcular otra primitiva, que será más sencilla si  $f'$  y  $g$  lo son (o si una de ellas lo es y la otra no es más complicada que la anterior).

Con la notación  $df \equiv f'(x)dx$  , la integración por partes se escribe  $\int u dv = uv - \int v du$

**Ej.**  $\int x \operatorname{sen} x dx = \left[ \begin{array}{l} u = x, dv = \operatorname{sen} x dx \\ \rightarrow du = dx, v = -\cos x \end{array} \right] = \int x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x$

**Ej.**  $\int x e^{-x} dx = [u = x, dv = e^{-x} dx \rightarrow du = dx, v = -e^{-x}] = \int x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -(x+1)e^{-x}$   
[las primitivas de  $\operatorname{sen} x$  y  $e^{-x}$  no son peores que ellas, pero la derivada del  $x$  sí es más sencilla].

Otras funciones que mejoran al ser derivadas son los logaritmos (y las potencias de  $x$  no se complican):

**Ej.**  $\int \sqrt{x} \log|x| dx = [u = \log|x|, dv = \sqrt{x} dx] = \frac{2}{3} x^{3/2} \log|x| - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{dx}{x} = x^{3/2} [\frac{2}{3} \log|x| - \frac{4}{9}]$

Algunas veces conviene tomar  $g' = 1$  (es decir,  $dv = dx$ ):

**Ej.**  $\int \log x dx = [u = \log x, dv = dx \rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = x] = x \log x - \int dx = x \log x - x$

**Ej.**  $\int \operatorname{arctan} x dx = [u = \operatorname{arctan} x, dv = dx] = x \operatorname{arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} = x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$

Otras veces hay que repetir la integración por partes:

**Ej.**  $\int x^2 e^x dx = \underset{u \uparrow dv \uparrow}{x^2 e^x} - 2 \int \underset{u \uparrow dv \uparrow}{x e^x} dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = [x^2 - 2x + 2] e^x$

Otro truco:

**Ej.**  $\int \frac{\log x dx}{x} = \log x \log x - \int \frac{\log x dx}{x} \rightarrow \int \frac{\log x dx}{x} = \frac{1}{2} [\log x]^2$  [se podía haber hecho a ojo]

Combinando las dos últimas ideas:

**Ej.**  $I = \int \underset{u \uparrow dv \uparrow}{\cos x e^x} dx = \cos x e^x + \int \underset{u \uparrow dv \uparrow}{\operatorname{sen} x e^x} dx = e^x [\cos x + \operatorname{sen} x] - I \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x [\cos x + \operatorname{sen} x]$

**Ej.** Curiosidad:  $\int \frac{dx}{x} = [u = x, dv = \frac{dx}{x^2} \rightarrow du = dx, v = -\frac{1}{x}] = -1 + \int \frac{dx}{x}$  ;  $\Rightarrow ? 0 = -1 !!$   
[no olvidemos que hay una  $K$  arbitraria aunque no la escribamos]

**Primitivas de funciones racionales:**  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , con  $P$  y  $Q$  polinomios

Si el  $\text{gr}P \geq \text{gr}Q$ , dividimos:  $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$  con el resto  $R$  de grado menor que  $Q$ .

Sabemos que  $Q$  se puede escribir como producto de polinomios del tipo  $(x-a)^m$  [raíces reales] y  $(x^2+cx+d)^n$  [complejas], siendo  $m$  y  $n$  la multiplicidad de las raíces [ $m = 1$  si son simples]. [El problema fundamental es que (como vimos en 3.3), salvo en polinomios especialmente sencillos, realizar esta descomposición de  $Q$  es, en la práctica, imposible por ser imposible hallar sus raíces].

Se prueba que  $\frac{R}{Q}$  se puede escribir como suma de múltiplos constantes de funciones del tipo:  $\frac{1}{(x-a)^j}$ ,  $\frac{1}{(x^2+cx+d)^k}$  y  $\frac{x}{(x^2+cx+d)^k}$ , con  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$  (llamadas **fracciones simples**).

Para ‘descomponer en fracciones simples’  $R/Q$  (para hallar la constante que acompaña a cada fracción) basta resolver un sistema lineal de ecuaciones. Y así, el problema de integrar  $P/Q$  se reduce, una vez factorizado  $Q$ , al de integrar el polinomio  $C$  y funciones como las últimas.

**Ej.**  $I = \int \frac{4x^4-6x^3+5x^2-11x+4}{x^5-x^4+x^3-3x^2+2x} dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$  (ya es  $4 < 5$ ). Empezamos factorizando:

$Q(x) = x(x-1)^2(x^2+x+2)$  [suerte hemos tenido] y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2} = \frac{A(x^4-x^3+x^2-3x+2)+B(x^4+x^2-2x)+C(x^3+x^2+2x)+(Dx+E)(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2(x^2+x+2)}$$

[Si hubiera  $(x-1)^m$  escribiríamos  $\frac{B_1}{x-1} + \dots + \frac{B_m}{(x-1)^m}$ ; si  $(x^2+x-2)^n$ ,  $\frac{D_1x+E_1}{x^2+x+2} + \dots + \frac{D_nx+E_n}{(x^2+x+2)^n}$ ]

Igualando los coeficientes de  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$  y la constante de ambos términos se obtiene el sistema:  
 $A + B + D = 4$ ,  $-A + C - 2D + E = -6$ ,  $A + B + C + D - 2E = 5$ ,  $-3A - 2B + 2C + E = -11$ ,  $2A = 4$

Resolviéndolo:  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = -1$ ,  $D = 1$ ,  $E = -1$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+2}$$

Las  $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$  son casi inmediatas. Más trabajo dan las otras. Primero se busca un logaritmo:

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

Y luego un arco tangente completando el cuadrado:  $x^2+x+2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left[ \left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right]$ .

$$\text{Por tanto: } \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \log(x^2+x+2) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{2/\sqrt{7} dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} \rightarrow$$

$$I = 2 \log|x| + \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log(x^2+x+2) - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$$

**Ej.**  $I = \int \frac{x^4-5x^2+x+8}{x^3+x^2-4x-4} dx = \int (x-1)dx + \int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} dx$  [de nuevo las raíces eran sencillas].

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

Cuando haya tantas raíces reales, mejor que igualar coeficientes haremos  $x = a$  para cada raíz  $a$ :

$$x = -1 \rightarrow -3A = 3, A = -1; \quad x = -2 \rightarrow 4B = 2, B = \frac{1}{2}; \quad x = 2 \rightarrow 12C = 6, C = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}x^2 - x - \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x+2| + \frac{1}{2} \log|x-2| = \frac{1}{2} \left[ x^2 - 2x + \log \frac{|x^2-4|}{|x+1|^2} \right]$$

[Para hallar las primitivas de las fracciones simples más complicadas  $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^n}$  se utilizarían fórmulas de reducción como la propuesta en problemas].



### Cambios de variable:

Supongamos que queremos hallar una primitiva de  $\int f(g(x))g'(x)dx$  (con  $f$  y  $g'$  continuas). Si  $F$  es una primitiva de  $f$ , por la regla de la cadena:  $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ . Así pues,  $F \circ g$  es la primitiva buscada. Basta pues integrar la  $f$  y evaluar el resultado en  $g(x)$ . Si lo que queremos es la integral definida entre  $a$  y  $b$  su valor es  $F(g(b)) - F(g(a))$ . Por tanto:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du|_{u=g(x)} ; \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

En la práctica se suele usar la notación de diferenciales: se escribe  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$  y si hay límites de integración es fácil recordar que:  $x = a \rightarrow u = g(a)$ ,  $x = b \rightarrow u = g(b)$ .

En algunos casos la  $g'(x)$  aparece explícitamente y es muy claro el cambio que hay que hacer:

**Ej.**  $\int \sin^3 2x \cos 2x dx = [ u = \sin 2x, du = 2 \cos 2x dx ] = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 = \frac{1}{8} \sin^4 2x$

[en casos tan sencillos no será necesario escribir la sustitución, es fácil ver a ojo que  $\sin^4 2x$  es casi la primitiva; derivándola mentalmente se ve que falta el  $1/8$ ]

**Ej.**  $\int_e^5 \frac{dx}{x \log x} = \left[ \begin{array}{l} u = \log x, du = \frac{dx}{x} \\ x = e \rightarrow u = 1, x = 5 \rightarrow u = \log 5 \end{array} \right] = \int_1^{\log 5} \frac{du}{u} = \log |\log 5| - 0 = \log(\log 5)$

[podíamos haber calculado la primitiva olvidando límites de integración y sustituir al final, una vez deshecho el cambio]

**Ej.**  $\int e^x \sqrt{e^x - 1} dx = [ u = e^x, du = e^x dx ] = \int \sqrt{u - 1} du = [u - 1]^{3/2} = [e^x - 1]^{3/2}$

**Ej.**  $\int \operatorname{sh}^3 x e^{-\operatorname{ch} x} dx = \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{ch} x, du = \operatorname{sh} x dx \\ \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 \end{array} \right] = \int [u^2 - 1]e^{-u} du = [\text{partes}]$   
 $= -u^2 e^{-u} + 2 \int u e^{-u} du + e^{-u} = [\text{partes}] = [1 - 2u - u^2]e^{-u} + 2 \int e^{-u} du = -[1 + 2u + u^2]e^{-u}$   
 $= -[1 + 2 \operatorname{ch} x + \operatorname{ch}^2 x] e^{-\operatorname{ch} x}$

(o partes directamente:  $\int \operatorname{sh}^3 x e^{-\operatorname{ch} x} dx = \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{sh}^2 x \\ dv = \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx \end{array} \right] = -\operatorname{sh}^2 x + 2 \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx$   
 $= [\text{partes}] = -\operatorname{sh}^2 x e^{-\operatorname{ch} x} - 2 \operatorname{ch} x e^{-\operatorname{ch} x} + 2 \int \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx = -[2 + 2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x] e^{-\operatorname{ch} x}$ )

Pero en la mayoría de los casos no es tan evidente el cambio ni tenemos una clara  $du$ . La forma del integrando puede sugerir hacer algún cambio  $u = g(x)$ . Para obtener entonces la  $f(u)$  se despeja la  $x$  en función de  $u$ , se calcula el  $dx$  y se sustituyen  $x$  y  $dx$  en la integral:

**Ej.**  $\int_4^9 \cos \sqrt{x} dx = [ u = \sqrt{x}, x = u^2, dx = 2u du, x = 4 \rightarrow u = 2, x = 9 \rightarrow u = 3 ] = 2 \int_2^3 u \cos u du =$   
 $[\text{partes}] = 2[u \sin u]_2^3 - 2 \int_2^3 \sin u du = 2[u \sin u]_2^3 + 2[\cos u]_2^3 = 2[3 \sin 3 - 2 \sin 2 + \cos 3 - \cos 2]$

**Ej.**  $\int \sqrt{e^x - 1} dx = [ u = e^x, x = \log u, dx = \frac{du}{u} ] = \int \frac{\sqrt{u-1}}{u} du = [ \sqrt{u-1} = z, u = z^2 + 1, du = 2z dz ]$   
 $= 2 \int \frac{z^2}{z^2+1} dz = 2 \int [1 - \frac{1}{z^2+1}] dz = 2z - 2 \arctan z = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1}$

[con un poco más de vista podríamos haber hecho directamente  $z = \sqrt{e^x - 1}$  acabando antes]

Un poco de práctica sugiere qué y cuándo sustituir. Para algunos tipos particulares de funciones (trigonométricas, con radicales...) hay sustituciones típicas que se sabe que dan buen resultado (las veremos a continuación) y que suelen conducir a la integración de funciones racionales de las que hemos visto.

En los cambios de variable las funciones  $f$  y  $g'$  deben ser continuas. Si  $g'$  aparece explícitamente es fácil ver que es así. Pero si no aparece se nos podría olvidar y cometer errores.

Como primer ejemplo de primitivas que se convierten en integrales racionales mediante cambios de variable estudiamos:  $\int R(e^x) dx$ , función racional de  $e^x$ .

Haciendo  $u = e^x$  se convierte en la racional  $\int \frac{R(u)}{u} du$ , pues  $dx = \frac{du}{u}$ .

**Ej.**  $\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{du}{u(1+u^2)} = \int [\frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}] du = \int \frac{du}{u} - \int \frac{u}{1+u^2} = \log u - \log(1+u^2) = x - \log(1+e^{2x})$

Más interés, por aparecer más, tienen las **primitivas de funciones trigonométricas**:

Para integrar  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , con  $R$  racional en seno y coseno, existe siempre un cambio  $[u = \tan \frac{x}{2}]$  que la convierte en una racional. Pero veamos antes una serie de casos más fáciles:

$\int \sin^m x \cos^n x dx$  :

**Si  $m$  ó  $n$  son impares:**  $\sin^{2k+1} x = \sin x (1 - \cos^2 x)^k$  y se hace  $u = \cos x$   
 $\cos^{2k+1} x = \cos x (1 - \sin^2 x)^k$  y se hace  $u = \sin x$

**Si  $m$  y  $n$  son pares,** se escriben en función del ángulo doble:  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

**Ej.**  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = [u = \sin x] = \int (u^2 - u^4) du = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x$

**Ej.**  $\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$

La integral más general  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  se convierte en cociente de polinomios haciendo:

$u = \cos x$ , si  $R$  es impar en  $\sin x$  [es decir, si  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ].

$u = \sin x$ , si  $R$  es impar en  $\cos x$  [es decir, si  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ].

$u = \tan x$  [ $\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$ ,  $dx = \frac{du}{1+u^2}$ ], si  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ .

$u = \tan \frac{x}{2}$  [ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ,  $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ ], para cualquier  $R$  [como último recurso].

**Ej.**  $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = [u = \cos x] = \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u+1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|$

De otra forma:  $\int \frac{dx}{\sin x} = [u = \tan \frac{x}{2}] = \int \frac{2du/[1+u^2]}{2u[1+u^2]} = \int \frac{du}{u} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

[ha salido tan fácil por casualidad] [las dos expresiones de la primitiva deben coincidir salvo  $K$  arbitraria (con pocas cuentas se ve que son iguales)]

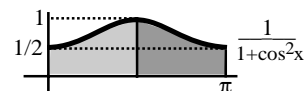
**Ej.**  $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \tan x} = [u = \tan x] = \int \frac{[1+u^2]^2}{u[1+u^2]} = \int \frac{du}{u} + \int u du = \log \left| \tan x \right| + \frac{1}{2} \tan^2 x$

Otro camino (más largo):  $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x [1 - \cos^2 x]} = [u = \cos x] = \int \frac{du}{u^3 [u+1][u-1]} = \dots$

[peor todavía sería hacer  $u = \sin x$  (también es impar en coseno) ó  $u = \tan \frac{x}{2}$ ]

**Ej.**  $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = [u = \tan x, dx = \frac{du}{1+u^2}] = \int_0^0 \frac{du}{2+u^2} = 0$

[resultado evidentemente falso: el integrando es siempre positivo y la integral debía ser un número positivo. No olvidemos que en los cambios de variable las funciones  $f$  y  $g'$  deben ser continuas. El cambio hecho (clásico, como hemos dicho, para este tipo de integrales) es válido sólo hasta  $\pi/2$ ; sí es cierto que



$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^\infty \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1/\sqrt{2} du}{1 + [u/\sqrt{2}]^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \rightarrow \int_0^\pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

pues el integrando es simétrico respecto a  $x = \frac{\pi}{2}$ . Al  $\infty$  que nos ha aparecido (que como siempre representará un límite) le daremos más seriedad cuando estudiemos las integrales impropias].

**Primitivas de irracionales** (las más simples;  $R$  función racional de  $x$  y la raíz que se indica)

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$  se convierte en racional haciendo  $u = \sqrt[n]{ax+b}$ .

**Ej.**  $\int x[1+x]^{1/4} dx = \left[ \begin{array}{l} u = [1+x]^{1/4}, x = u^4 - 1 \\ dx = 4u^3 du \end{array} \right] = \int 4(u^8 - u^4) du = \frac{4u^9}{9} - \frac{4u^5}{5} = \frac{4}{9}[1+x]^{9/4} - \frac{4}{5}[1+x]^{5/4}$

También se puede hacer por partes:

$$\int x[1+x]^{1/4} dx = \frac{4}{5}x[1+x]^{5/4} - \frac{4}{5} \int [1+x]^{5/4} dx = \frac{4}{5}x[1+x]^{5/4} - \frac{16}{45}[1+x]^{9/4}$$

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$  se convierte en trigonométrica haciendo  $x = a \sin u$ .

**Ej.**  $\int \sqrt{4-x^2} dx = [x = 2 \sin u, dx = 2 \cos u du] = \int 4 \cos^2 u du = 2u + \sin 2u$   
 $= 2u + 2 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2}$

$\int R(x, \sqrt{x^2+a}) dx$  se convierte en racional haciendo  $u = x + \sqrt{x^2+a}$ ,

puesto que  $(u-x)^2 = u^2 - 2xu + x^2 = x^2 + a \rightarrow x = \frac{u}{2} - \frac{a}{2u} \rightarrow dx = \frac{1}{2} + \frac{a}{2u^2}$ .

(El cambio  $u = \sqrt{x^2+a}$  no sirve de nada pues vuelven a aparecer raíces al despejar la  $x$ ).

**Ej.**  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = [u = x + \sqrt{x^2+1}, x = \frac{u^2-1}{2u}, dx = \frac{1+u^2}{2u^2} du] = \int \frac{2du}{u^2-1} = \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \log \left| \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} \right|$

**Ej.**  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$  [a ojo!, antes de ponerse a calcular a lo loco, miremos si es inmediata]

[Las primitivas con raíces  $\sqrt{ax^2+bx+c}$  se reducen a las últimas completando cuadrados].

Recordamos que si las raíces son más complicadas (como  $\sqrt{x^3+a}$  ó  $\sqrt[3]{x^2+a}$ ), las integrales, son, en general, no calculables. Esto no quiere decir que alguna, en particular, no lo sea:

**Ej.**  $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^4+1}} = [t = x^4] = \frac{1}{4} \int \frac{t dt}{\sqrt{t+1}} = [u = \sqrt{t+1}] = \frac{1}{2} \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{6} - \frac{u}{2} = \frac{1}{6}[x^4 - 2]\sqrt{x^4+1}$   
 [pero no se podría hallar la primitiva de  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ ]

## 5.4. Integrales impropias

La integral la hemos definido para funciones  $f$  acotadas en intervalos  $[a, b]$  finitos. Extendamos la definición, primero para intervalos de integración no acotados  $[a, \infty)$  ó  $(-\infty, b]$ . Como siempre que aparece un  $\infty$  aparecerá un límite en la definición:

Supongamos que  $\int_a^b f$  existe para todo  $b \geq a$ . Si existe el  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$  se le llama **integral impropia** de  $f$  en  $[a, \infty)$ , se representa por  $\int_a^\infty f$  ó  $\int_a^\infty f(x)dx$  y la integral impropia se dice **convergente**. Si  $\int_a^\infty f$  no es convergente, se dice **divergente**.

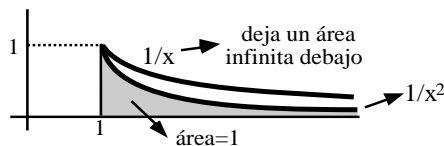
[ Análogamente se define  $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$  ].

[La integral entre  $a$  y  $b$  existe  $\forall b$ , como sabemos, si por ejemplo  $f$  es continua (o continua a trozos) en  $[a, \infty)$ ; como para cada  $b$  la integral es un número, tenemos una función de  $b$  y tiene sentido hablar de su límite cuando  $b \rightarrow \infty$ ; este límite (el valor de la integral impropia) será otro número si la integral converge].

**Ej.**  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} [-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{b}] = 1$

[la integral es convergente y su valor es 1]

**Ej.**  $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log b]$  diverge



En general,  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$  diverge si  $s \leq 1$  y converge si  $s > 1$  [hacia  $\frac{1}{s-1}$ ]

[es inmediato comprobarlo; para los mismos  $s$  converge la  $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \forall a > 0$ , pues  $\int_a^b$  e  $\int_1^b$  son dos funciones de  $b$  que sólo difieren en la constante  $\int_1^a$ ]

$\int_0^\infty e^{ax} dx = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ax}]_0^b = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ab} - 1]$  converge si  $a < 0$  [hacia  $-\frac{1}{a}$ ] y diverge si  $a \geq 0$ .

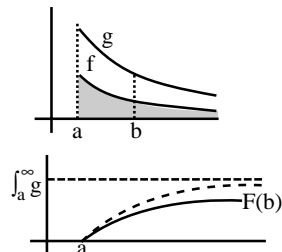
[Se suele abreviar  $[e^{ax}]_0^\infty$  en lugar de  $\lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ax}]_0^b$ ; pero no olvidemos que se trata de un límite]

Aunque no sepamos calcular la primitiva podremos, en bastantes ocasiones, determinar si es o no convergente (como ocurría con las series; incluso teníamos un criterio integral que relacionaba unas y otras; los criterios de convergencia son muy parecidos).

**Criterios para funciones positivas** (los damos para la  $\int_a^\infty$ ; son análogos para  $\int_{-\infty}^b$ ).

En todos suponemos que las funciones que aparecen son integrables en  $[a, b] \forall b$ .

**Teorema:** Si  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  para  $x \geq a$ ,  $\int_a^\infty g$  converge  $\Rightarrow \int_a^\infty f$  converge e  $\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$



$$0 \leq F(b) = \int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^\infty g \quad \forall b \geq a$$

$\Rightarrow F(b)$  creciente y acotada superiormente

$\Rightarrow F(b)$  tiene límite si  $b \rightarrow \infty$

(la última  $\Rightarrow$  se prueba como en las sucesiones).

[El teorema dice también que  $\int_a^\infty f$  divergente  $\Rightarrow \int_a^\infty g$  divergente, desde luego; pero como siempre, en este tipo de criterios, de que

la pequeña converja o de que la gorda diverja, no se sigue nada; e insistimos en que es para funciones positivas: si una  $f$  cualquiera es menor que otra de integral convergente, no tiene que converger su integral, ya que podría irse a  $-\infty$ ].

Las comparaciones con  $\leq$  son siempre más complicadas que las hechas por paso al límite:

**Teorema:** Si  $f$  y  $g$  son positivas para  $x \geq a$  y  $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$  finito, entonces:  
 Si  $c > 0$ ,  $\int_a^\infty g$  convergente  $\Leftrightarrow \int_a^\infty f$  convergente.  
 Si  $c = 0$ ,  $\int_a^\infty g$  convergente  $\Rightarrow \int_a^\infty f$  convergente.  
 [es decir,  $\int_a^\infty f$  divergente  $\Rightarrow \int_a^\infty g$  divergente]

Si  $c > 0$ , para  $x \geq M$  es  $\frac{c}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{c}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3c}{2}g(x)$  y podemos aplicar el teorema anterior. Si  $c = 0$ , para  $x \geq M$  es  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  y de nuevo el teorema. Además está claro que  $\int_M^\infty f$  converge  $\Leftrightarrow \int_a^\infty f$  converge.

Si la función del integrando  $f$  **no es positiva**, como en las series, conviene considerar el  $|f|$ :

**Teorema:**  $\int_a^\infty |f|$  convergente  $\Rightarrow \int_a^\infty f$  convergente [ $f$  se dice absolutamente integrable en  $[a, \infty)$ ]

$$0 \leq f + |f| \leq 2|f| \Rightarrow \int_a^\infty [f + |f|] \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_a^\infty [f + |f|] - \int_a^\infty |f| \text{ convergente}$$

**Ej.**  $\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx$  diverge, pues si  $x \geq 3$  es  $\frac{[\log x]^2}{x} \geq \frac{1}{x}$  e  $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$  diverge.

Por el paso al límite debemos utilizar la parte con  $c = 0$  porque el log no se parece a ningún  $x^s$ :

$$\frac{1/x}{[\log x]^2/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \text{ e } \int_3^\infty \frac{dx}{x} \text{ divergente} \Rightarrow \int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx \text{ diverge (mayor que divergente).}$$

También nos bastaba la definición:  $\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx = \frac{1}{3} [\log x]^3 \Big|_3^\infty \rightarrow \infty$ .

**Ej.**  $\int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^5-x+1}}$ . Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\frac{x}{\sqrt{x^5-x+1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$  [es decir,  $\frac{x/\sqrt{x^5-x+1}}{1/x^{3/2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ ].

Como  $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$  converge, la dada también (no sabemos a qué número).

**Ej.**  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  (sin primitiva elemental) converge, pues  $\frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = e^{x-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  e  $\int_0^\infty e^{-x} dx$  converge.

O bien, por desigualdades: si  $x \geq 1$  es  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$  y de aquí:

$$\int_1^\infty e^{-x} dx \text{ converge } (\Leftrightarrow \int_0^\infty \text{ converge}) \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2} \text{ converge } (\Leftrightarrow \int_0^\infty \text{ converge}).$$

[con las integrales dobles de Cálculo II se puede ver que  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ]

**Ej.**  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x}$  divergente [pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$ ]  $\Rightarrow$  la dada diverge.

**Ej.**  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^3} dx$  es convergente porque  $|\frac{\sin x}{1+x^3}| \leq \frac{1}{1+x^3}$  e  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}$  converge ( $\sim \frac{1}{x^3}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ )

**Ej.** Aplicando la misma idea a  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  no podemos concluir nada, ya que  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$  diverge.

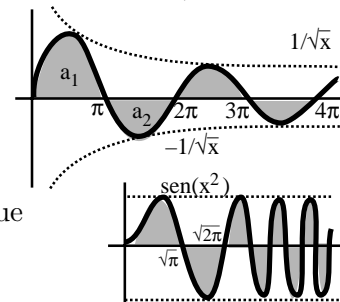
Pero  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \dots \equiv \sum_{k=1}^\infty a_k$ , donde

$$|a_k| = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq 2 \left[ \sqrt{k\pi} - \sqrt{(k-1)\pi} \right].$$

La serie es alternada, decreciente y con  $a_k \rightarrow 0$ , con lo que por Leibniz converge (y por tanto la integral). De aquí deducimos que

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = [t = x^2] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \text{ también converge}$$

(¡ a pesar de que  $f(x)$  no tiende a 0 si  $x \rightarrow \infty$  ! [esto no es como en las series]).



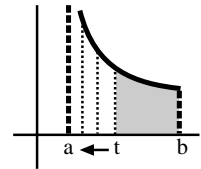
La segunda extensión de la definición de integral es para  $f$  **no acotada en un extremo del intervalo**:

Supongamos que  $\int_t^b f$  existe para todo  $t \in (a, b]$ . Se define  $\int_{a^+}^b f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f$  si el límite existe y en ese caso la integral impropia se dice convergente.

[ Análogamente:  $\int_a^{b^-} f = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f$  ]

(en vez de  $a^+$  y  $b^-$  se escribe muchas veces  $a$  y  $b$ ; no olvidemos que la integral es impropia)

(no se pide que  $f$  esté acotada en  $(a, b]$ , ni siquiera que esté definida en el punto  $a$ ; para que  $f$  sea integrable en  $[t, b]$ , debe, desde luego, estar acotada en cada intervalo de esa forma; por ejemplo, si  $f$  es continua en  $(a, b]$  se tiene, para todo  $t$ , garantizada la existencia de la integral de  $f$  en  $[t, b]$ , aunque el límite puede no existir y divergir la integral impropia)



**Ej.**  $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\frac{1}{t} - 1]$  no existe (la integral impropia diverge).

$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 - 2\sqrt{t}] = 2$ , converge (y su valor es 2).

En general, se ve fácil que  $\int_{a^+}^b \frac{dx}{[x-a]^s}$  e  $\int_c^{a^-} \frac{dx}{[x-a]^s}$  convergen si  $s < 1$  y divergen si  $s \geq 1$

[la de  $a^-$ , si tiene sentido ( $s = \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \dots$ ); si  $s = \frac{1}{2}$  ó  $s = \pi$  la función no está definida]

Para este segundo tipo de integrales impropias existen criterios de convergencia totalmente análogos a los vistos para las del primer tipo. Resumiendo (las de  $a^+$ ) y sin demostraciones:

**Teorema:**

Si  $0 \leq f \leq g$  en  $(a, b]$ ,  $\int_{a^+}^b g$  convergente  $\Rightarrow \int_{a^+}^b f$  convergente e  $\int_{a^+}^b f \leq \int_{a^+}^b g$ .

Sean  $f, g \geq 0$  en  $(a, b]$  y sea finito el  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ , entonces:

si  $c > 0$ ,  $\int_{a^+}^b g$  converge  $\Leftrightarrow \int_{a^+}^b f$  converge; si  $c = 0$ ,  $\int_{a^+}^b g$  converge  $\Rightarrow \int_{a^+}^b f$  converge.

$\int_{a^+}^b |f|$  convergente  $\Rightarrow \int_{a^+}^b f$  convergente.

**Ej.**  $\int_{0^+}^1 \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}} dx$  converge, pues  $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}} \leq \frac{1}{x^{3/4}}$  e  $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^{3/4}}$  converge (o porque  $\frac{\cos^2 x/x^{3/4}}{1/x^{3/4}} \rightarrow 1$ ).

**Ej.**  $\int_{2^+}^7 \frac{dx}{x^3-8}$  diverge, pues se parece cerca de  $x = 2$  a  $\int_{2^+}^7 \frac{dx}{x-2}$  divergente:

$$\frac{1/[x^3-8]}{1/[x-2]} = \frac{1}{x^2+2x+4} \rightarrow \frac{1}{12} \text{ o L'Hôpital.}$$

**Ej.**  $\int_{0^+}^3 \frac{dx}{\sin x}$ . Cerca de 0 el  $\sin x \sim x : \frac{1/\sin x}{1/x} \rightarrow 1$ . Como  $\int_{0^+}^3 \frac{dx}{x}$  diverge, la dada diverge.

**Ej.** La  $\int_{0^+}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  de antes, no plantea problemas en 0, a pesar de anularse su denominador, pues se parece cerca de  $x = 0$  a  $\sqrt{x}$  que no sólo es integrable, es continua.

**Ej.**  $\int_{0^+}^1 (\log x)^2 dx$  es convergente, pues  $\frac{(\log x)^2}{1/\sqrt{x}} = (x^{1/4} \log x)^2 \rightarrow 0$  (lo sabemos desde 4.4),

con lo que la nuestra es más pequeña que una convergente. Y podemos hallar su valor:

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2 \int x \log x dx = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \Rightarrow \int_{0^+}^1 (\log x)^2 dx = 2$$

Hay otras integrales que reúnen **más de un tipo de impropiedad**:  $\int_{-\infty}^{\infty}$ ,  $\int_{a^+}^{\infty}$ ,  $\int_{a^-}^{\infty}$ , ... Cada integral de estas se dice convergente si, dividido el intervalo en subintervalos tales que en cada uno de ellos haya una única impropiedad, **todas** las integrales resultantes convergen. Por ejemplo, si  $f$  es continua en todo  $\mathbf{R}$ :

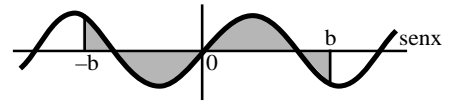
$$\int_{-\infty}^{\infty} f \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f \text{ e } \int_0^{\infty} f \text{ convergen y su valor es } \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f$$

[esta integral no se define como  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f$  que podría existir a pesar de ser  $\int_{-\infty}^{\infty} f$  divergente; a ese límite de las integrales calculadas en intervalos simétricos  $[-b, b]$ , si existe, se le llama valor principal de Cauchy de la integral y aparece en matemáticas más avanzadas]

**Ej.**  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$  diverge, pues  $\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [1 - \cos b]$  no existe (y tampoco existe  $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$ ).

[Sí existe el valor principal de Cauchy:

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \sin x dx = 0 \text{ (el seno es impar) ]}$$



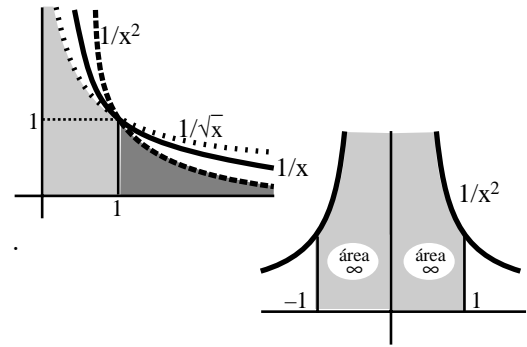
**Ej.**  $\int_{0^+}^{\infty} \frac{\arctan x}{x+x^2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  es convergente pues comporta como  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  convergente [  $\frac{\arctan x/x+x^2}{1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$  ]

Cerca de 0 :  $\frac{\arctan x}{x+x^2} \sim \frac{1}{1+x}$  con límite finito  $\Rightarrow \int_{0^+}^1$  converge.

Como convergen las dos,  $\int_{0^+}^{\infty}$  converge.

**Ej.**  $\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_{0^+}^1 + \int_1^{\infty}$  diverge  $\forall s$  :

Si  $s > 1$  converge la de  $\infty$ , pero diverge la de  $0^+$ ,  
si  $s < 1$  ocurre al revés y si  $s = 1$  divergen ambas.



**Ej.**  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  no es una integral normal y ni siquiera existe como impropia, pues no convergen ni  $\int_{-1}^0$  ni  $\int_0^1$ .

(y tampoco existe el VP de Cauchy de la impropia, definido en estos casos por  $\lim_{b \rightarrow 0} [\int_{-1}^b f + \int_b^1 f]$ )

**Ej.**  $\int_{1^+}^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}} \cdot \int_{1^+}^2$  converge (pues  $\frac{x}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \sim \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$ ), pero  $\int_2^{\infty}$  diverge (pues  $\sim \frac{1}{x}$ ).

Por tanto, la inicial diverge (insistimos en que deben converger las dos para que sea convergente).

**Ej.**  $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$  converge, pues lo hacen  $\int_{0^+}^1$  (tiene límite en  $x = 0$ ) e  $\int_1^{\infty}$  (es  $0 \leq \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ).

**Ej.**  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . En  $x = 0$  converge si y sólo si  $x > 0$  (pues se parece a  $\int_0^{\infty} t^{x-1} dt$ ).

En  $\infty$  converge siempre:  $\frac{t^{x-1} e^{-t} t^{x+1}}{t^{-2} e^t} \rightarrow 0 \forall x$  e  $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge. La  $\int_0^{\infty}$  inicial converge  $\forall x > 0$ .

La  $\Gamma(x)$  (**función gamma**) definida por esta impropia generaliza el factorial:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \underbrace{-t^x e^{-t}}_{\text{partes}} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

y por tanto  $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$ , si  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\text{pues } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = 1$$

**Ej.**  $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^3 \log x} dx$ . Plantea problemas en  $0^+$ ,  $1^{\pm}$ ,  $\infty$ . Para converger, deben hacerlo las cuatro.

Analizamos todas: En  $0^+$  :  $\sim \int \frac{dx}{x \log x} = \log(|\log x|) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$  (diverge).

En  $1^{\pm}$  :  $\sim \int \frac{dx}{\log x} \sim \int \frac{dx}{x-1}$  (divergen ambas). En  $\infty$  :  $\leq \int \frac{dx}{x^3}$  (converge).

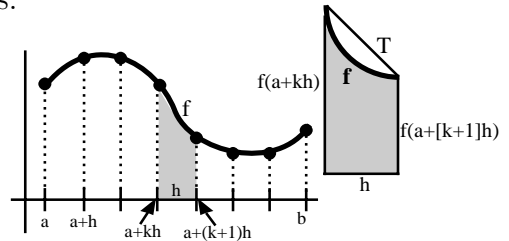
## 5.5. Integración aproximada

Funciones integrables pueden no tener primitivas elementales o ser muy largo calcularlas. Sin embargo, es fácil obtener fórmulas sencillas (sobre todo para los ordenadores) que nos dan el valor aproximado de una integral definida sin integrar. Las  $U_n$  y  $L_n$  nos daban ya alguna estimación, pero son más prácticos los siguientes métodos:

### Fórmula de los trapecios:

Dividimos  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales de anchura  $\frac{b-a}{n} = h$ .

Como aproximación de  $\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f$  podemos tomar el área del trapecio  $T$  de la figura:  $\frac{h}{2}[f(a+kh) + f(a+[k+1]h)]$ .



Entonces  $\int_a^b f$  será aproximadamente igual a la suma de las áreas de los  $n$  trapecios:

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)] + \frac{h}{2}[f(a+h) + f(a+2h)] + \dots + \frac{h}{2}[f(a+[n-1]h) + f(a+nh)] ,$$

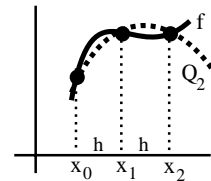
$$\int_a^b f \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+[n-1]h) + f(b)]$$

### Fórmula de Simpson:

Una aproximación mejor se tendrá si, dividido  $[a, b]$  en un número par  $n = 2m$  de partes iguales de longitud  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ , en vez de sustituir cada trozo de  $f$  por una recta, la sustituimos por la parábola que interpola la gráfica de  $f$  en tres puntos consecutivos:

$$x_0 = a + kh, \quad x_1 = a + [k+1]h = x_0 + h \quad \text{y} \quad x_2 = a + [k+2]h = x_0 + 2h,$$

es decir, por el polinomio:  $Q_2(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1)$ , con:  $A_0 = f(x_0)$ ,  $A_1 = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)]$ ,  $A_2 = \frac{1}{2h^2}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)]$ .



Integrando  $Q_2$  se tiene tras algunos cálculos:

$$\int_{a+kh}^{a+[k+2]h} f \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} Q_2(x)dx = 2hA_0 + 2h^2A_1 + \frac{2}{3}h^3A_2 = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)]$$

Y sumando las  $m$  integrales anteriores obtenemos:

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + 4f(a+[n-1]h) + f(b)]$$

[Para aplicar cualquiera de los dos métodos no tenemos ni que tener la expresión analítica de  $f$ ; nos bastan algunos de sus valores, situación que experimentalmente se presenta en muchos casos].

Si se quiere utilizar con seriedad un método numérico se debe hablar del error cometido. Demos algún resultado sin demostración. La estimación por trapecios es exacta si  $f(x)$  es una recta, función con  $f'' = 0$ . No es de extrañar que el error dependa de  $f''$ . Puede probarse que:

Si  $|f''(x)| \leq M_2$  para  $x \in [a, b]$  entonces:  $|\text{error}| \leq \frac{1}{12}(b-a)M_2h^2$

Se prueba que Simpson es exacto si  $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$  y que:

Si  $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$  para  $x \in [a, b]$  entonces:  $|\text{error}| \leq \frac{1}{180}(b-a)M_4h^4$

Se ve que ambos métodos mejoran, como era esperable, cuando  $h \rightarrow 0$ , más rápidamente Simpson ya que  $h^4$  tiende más fuertemente a 0 que  $h^2$ . Como las cuentas a realizar en ambos casos son casi las mismas, será mejor acudir a Simpson si tenemos que aproximar una integral (hay métodos mucho mejores, pero también más complicados).



**Ej.** Poco práctico, para comparar y ver si funcionan los métodos. Aproximemos  $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$  ( $= \pi$ ) :

**Trapezios:**  $h = \frac{1}{2}, n = 2 : \int_0^1 \approx \frac{4}{4} [1 + 2\frac{4}{5} + \frac{1}{2}] = \frac{31}{10} = 3.1$   
 $h = \frac{1}{4}, n = 4 : \int_0^1 \approx \frac{4}{8} [1 + 2\frac{16}{17} + 2\frac{4}{5} + 2\frac{16}{25} + \frac{4}{5}] \approx 3.1312$

**Simpson:**  $h = \frac{1}{2}, n = 2 : \int_0^1 \approx \frac{4}{6} [1 + 4\frac{4}{5} + \frac{1}{2}] = \frac{47}{15} \approx 3.13$   
 $h = \frac{1}{4}, n = 4 : \int_0^1 \approx \frac{4}{12} [1 + 4\frac{16}{17} + 2\frac{4}{5} + 4\frac{16}{25} + \frac{4}{5}] \approx 3.14157$

**Ej.** Calculemos aproximadamente  $\int_0^1 \text{sen} x^2 dx$  (función sin primitiva elemental; esto ya es útil):

$h = \frac{1}{2}$     **T.**  $\int_0^1 \approx \frac{1}{4}[0 + 2 \text{sen} \frac{1}{4} + \text{sen} 1] \approx 0.334$     **S.**  $\int_0^1 \approx \frac{1}{6}[0 + 4 \text{sen} \frac{1}{4} + \text{sen} 1] \approx 0.305$

$h = \frac{1}{4}$     **T.**  $\int_0^1 \approx \frac{1}{8}[0 + 2 \text{sen} \frac{1}{16} + 2 \text{sen} \frac{1}{4} + 2 \text{sen} \frac{9}{16} + \text{sen} 1] \approx 0.316$   
**S.**  $\int_0^1 \approx \frac{1}{12}[0 + 4 \text{sen} \frac{1}{16} + 2 \text{sen} \frac{1}{4} + 4 \text{sen} \frac{9}{16} + \text{sen} 1] \approx 0.3099$

$h = \frac{1}{6}$     **T.**  $\int_0^1 \approx \frac{1}{12}[0 + 2 \text{sen} \frac{1}{36} + 2 \text{sen} \frac{1}{9} + \dots + \text{sen} 1] \approx 0.313$   
**S.**  $\int_0^1 \approx \frac{1}{18}[0 + 4 \text{sen} \frac{1}{36} + 2 \text{sen} \frac{1}{9} + \dots + \text{sen} 1] \approx 0.310205$

$h = \frac{1}{100}$     **T.**  $\int_0^1 \approx 0.3105$     **S.**  $\int_0^1 \approx 0.3102683009$

$h = \frac{1}{1000}$     **T.**  $\int_0^1 \approx 0.31026839$     **S.**  $\int_0^1 \approx 0.3102683017$

[estos últimos valores exigen, desde luego, o una enorme paciencia o un ordenador]

Como  $f''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \text{sen} x^2$ ,  $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 12) \text{sen} x^2 - 48x^2 \cos x^2$ , en  $[0, 1]$  es  
 $|f''| \leq 6$ ,  $|f^{(4)}| \leq 4|4x^4 - 3| + |48x^2| \leq 60 \rightarrow |\text{errorT}| \leq \frac{1}{2}h^2$ ;  $|\text{errorS}| \leq \frac{1}{2}h^4$

### Integración de series de Taylor.

Para algunas funciones es posible calcular su integral aproximada utilizando series de Taylor. De la misma forma que las series de Taylor (dentro del intervalo de convergencia) se podían derivar término a término, vamos a demostrar que se pueden integrar término a término dentro de dicho intervalo. Esto será consecuencia de los siguientes resultados:

**Teorema:** Sea  $\{f_n\}$  sucesión de funciones continuas que converge **uniformemente** hacia  $f$  en  $[a, b]$ . Entonces  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe un  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$  para todo  $x \in [a, b]$ .

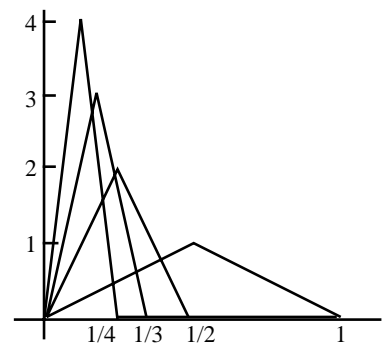
Si  $n \geq N$ ,  $\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$ .

Este resultado es **falso** si la sucesión de funciones converge sólo puntualmente (el límite de las integrales puede ser distinto de la integral del límite) como muestra la siguiente  $\{f_n\}$ :

**Ej.**  $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x \leq 1/2n \\ 2n - 2n^2x, & 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$

La gráfica de cada  $f_n$  es un triángulo isósceles de altura  $n$  sobre el intervalo  $[0, 1/n]$  y vale 0 en el resto de  $[0, 1]$ ; el área encerrada por cada  $f_n$  es  $1/2$  para todo  $n$ . El límite puntual de las  $f_n$  es  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$  ya que para cada  $x$ , a partir de un  $N$  todas las  $f_n(x) = 0$  y  $f_n(0) = 0 \forall n$ . Está claro que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente y que se tiene:

$$0 = \int_0^1 f_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$$



Como consecuencia inmediata de lo anterior, tenemos que:

**Teorema:** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge **uniformemente** hacia  $f$  en  $[a, b]$  entonces  $\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$

**Ej.** Como  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} nx}{n^2}$  converge uniformemente en todo  $\mathbf{R}$ , es  $\int_0^{\pi} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen} nx}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[2n-1]^3}$

Y en el caso particular de las series de potencias concluimos:

**Teorema:** Si  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  para  $|x| < R \Rightarrow$   
 $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots$

Pues en  $[-x, x]$  sabemos que la serie converge uniformemente.

**Ej.** Para la  $f(x) = \text{sen } x^2$ , aproximada antes por Trapecios y Simpson, tenemos entonces que:

$$\int_0^x \text{sen } t^2 dt = \int_0^x [t^2 - \frac{1}{3!} t^6 + \frac{1}{5!} t^{10} - \frac{1}{7!} t^{14} + \dots] dt = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{42} x^7 + \frac{1}{1320} x^{11} - \frac{1}{75600} x^{15} + \dots \quad \forall x$$

$$\rightarrow \int_0^1 \text{sen } t^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \dots$$

y podemos aproximar la integral con las sumas parciales de esta serie alternada:

$$\int_0^1 \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.3095 \text{ con error menor que } \frac{1}{1320} \approx 0.0007 < 10^{-3}$$

$$\int_0^1 \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0.310281 \text{ con error menor que } \frac{1}{75600} \approx 0.000013 \sim 10^{-5}$$

$$\int_0^1 \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} \approx 0.310268158 \text{ con error menor que } \frac{1}{9! \cdot 19} \approx 0.000000145 \sim 10^{-7}$$

Con la misma serie de potencias podemos calcular la integral para cualquier otro  $x$ .

Por ejemplo, si  $x = \frac{1}{2}$ :  $\int_0^{1/2} \text{sen } t^2 dt = \frac{1}{24} - \frac{1}{5376} + \frac{1}{2703360} - \frac{1}{2477260800} + \dots$   
 serie que converge mucho más rápidamente (cerca del origen se parece más el desarrollo).

También podemos probar con la serie que si  $x = \sqrt{2\pi}$  ( $\approx 2.51$ ) el valor de la integral es positivo (como sospechábamos en un ejemplo de 5.2). Todo irá más lento ahora:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \text{sen } t^2 dt = \frac{[2\pi]^{2/3}}{3} \left[ 1 - \frac{2\pi^2}{7} + \frac{2\pi^4}{55} - \frac{4\pi^6}{1575} + \dots \right] \approx 5.24 [1 - 2.82 + 3.54 - 2.44 + 1.06 - 0.31 + \dots]$$

Las sumas parciales de la serie entre corchetes van siendo: 1, -1.82, 1.72, -0.72, 0.34, 0.09, ...  
 Como en una serie alternada decreciente (ésta lo es a partir de tercer término) su suma está entre dos sumas parciales consecutivas, concluimos que la integral es  $> 0$ .

[Para dar el valor de la integral con un error  $< 10^{-2}$  se ve que hay que sumar 8 términos (dos más) y se obtiene 0.43; Simpson con  $n = 2$  y  $n = 4$  da, respectivamente, 1.67 (la gráfica se parece muy poco a una parábola) y 0.42].

Como disponemos de su desarrollo de Taylor, aparte de las anteriores aproximaciones numéricas, podemos realizar otras operaciones en la que aparezca la integral, como, por ejemplo, calcular algún límite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \int_0^x \text{sen } t^2 dt - x^4}{\arctan x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^4 - \frac{1}{14} x^8 + \dots] - x^4}{x^8 - \frac{1}{3} x^{24}} = \frac{\frac{1}{14} x^8 + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = -\frac{1}{14}$$

(por L'Hôpital más largo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + x^{16}] \frac{3 \int_0^x \text{sen } t^2 dt + 3x \text{sen } x^2 - 4x^3}{\arctan 8x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \text{sen } x^2 + 6x^2 \cos x^2 - 12x^2}{\arctan 56x^6} = \dots)$$

La necesidad de aproximar una integral (o de dar cotas a su valor) surge en muchos problemas. En los siguientes ejemplos (y en algunos de la próxima sección) además de repasar temas anteriores estimaremos el valor de varias utilizando Taylor, Simpson, ... (u otras ideas):

**Ej.** Encontramos cotas racionales de  $I = \int_0^1 f$  si  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$  (de primitiva no calculable).

Las cotas más sencillas, pues claramente  $0 \leq f(x) \leq 1$ , son  $0 = \int_0^1 0 \leq I \leq \int_0^1 1 = 1$ .

Podemos mejorar la cota superior hallando el máximo de  $f$  en  $[0, 1]$ :

$$f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2} \Rightarrow \text{máximo si } x = 1 \text{ y } f(1) = e^{-1} \Rightarrow I \leq e^{-1} \stackrel{e > 2.7}{>} \frac{10}{27}$$

Si comparamos en  $[0, 1]$  con diversas funciones integrables:

$$f(x) \leq x^2 \Rightarrow I \leq \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (mejor que la anterior)}$$

$$f(x) \leq x e^{-x^2} \Rightarrow I \leq \left[ -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [1 - e^{-1}] \stackrel{e < 2.8}{<} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{10}{28} \right] = \frac{9}{28} \text{ (aún menor)}$$

$$f(x) \leq x^2 e^{-x^3} \Rightarrow I \leq \left[ -\frac{1}{3} e^{-x^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} [1 - e^{-1}] < \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{10}{28} \right] = \frac{3}{14} \text{ (más pequeña aún)}$$

$$f(x) \geq x^2 e^{-x} \Rightarrow I \geq \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \underset{\text{partes}}{=} -[x^2 + 2x + 2]e^{-x} \Big|_0^1 = 2 - 5e^{-1} > 2 - \frac{50}{27} = \frac{4}{27}$$

Pero si queremos obtener cotas con la precisión que necesitamos, lo mejor es usar Taylor:

$$I = \int_0^1 [x^2 - x^4 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{6}x^8 + \dots] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \dots \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} < \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} = \frac{176}{945} < \dots < I < \dots < \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} = \frac{43}{210} < \frac{1}{3}$$

La cota inferior  $\frac{2}{15}$  es peor que la obtenida comparando, pero  $\frac{176}{945} > \frac{4}{27}$  ya la mejora.

Y la superior  $\frac{43}{210}$  es más pequeña que la menor de las anteriores:  $\frac{43}{210} < \frac{3}{14}$ .

[Con un ordenador se consigue mucha precisión ( $I \approx 0.189472$ ), nosotros hemos conseguido sólo deducir que  $\frac{176}{945} \approx 0.186 < I < \frac{43}{210} \approx 0.205$ ; pero nos costaría poco sumar más términos].

[Simpson da unos muy buenos resultados, pero es bastante largo acotar el error:

$$n = 2 \rightarrow I \approx \frac{1}{6} [0 + e^{-1/4} + e^{-1}] \approx 0.191$$

$$n = 4 \rightarrow I \approx \frac{1}{12} [0 + \frac{1}{4}e^{-1/16} + \frac{1}{2}e^{-1/4} + \frac{9}{4}e^{-9/16} + e^{-1}] \approx 0.18951 ]$$

**Ej.** Si  $f(x) = \frac{2x}{8-x^2}$ , hallemos de diversas formas (sin calculadora) racionales que aproximen la integral  $I = \int_0^1 f$  con un error menor que  $10^{-2}$ .

Parece inútil aproximarla si podemos fácilmente dar el valor exacto:  $I = -\log|8-x^2| \Big|_0^1 = \log \frac{8}{7}$ .

El problema es que, sin calculadora, no sabemos el valor de ese logaritmo. Pero por Taylor:

$$\log(1 + \frac{1}{7}) = \frac{1}{7} - \frac{1}{2 \cdot 49} + \frac{1}{3 \cdot 243} - \dots \text{ serie de Leibniz } \rightarrow I \approx \frac{13}{98}, \text{ con error } < \frac{1}{729} < 10^{-2}.$$

Podríamos también desarrollar primero el integrando y luego integrar la serie:

$$\frac{2x}{8-x^2} = \frac{x}{4} \frac{1}{1-x^2/8} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{x^2}{8} \right]^n = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{32} + \frac{x^5}{256} + \dots \rightarrow I = \frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{1536} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n8^n}$$

El problema de esta serie (que, desde luego, debe sumar lo mismo) es que no es alternada, lo que hace difícil estimar los errores.

Sumando dos términos  $I \approx \frac{17}{128}$ , el error cometido es  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n8^n} < \frac{1}{3 \cdot 8^3} \sum_{n=3}^{\infty} \left[ \frac{1}{8} \right]^n = \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 8^2} < 10^{-2}$ .

Probablemente Simpson daría un error admisible con ya con  $h = \frac{1}{2}$ , pero necesitaríamos acotar la  $f^{(4)}$ , lo que es largo. Probemos con Trapecios que hay que derivar menos:

$$f' = 2 \frac{8+x^2}{[8-x^2]^2}, f'' = 4 \frac{x[24+x^2]}{[8-x^2]^3} \rightarrow \text{en } [0, 1] \text{ es } |f''| \leq \frac{100}{7^3} \rightarrow |\text{error}| \leq \frac{100}{12 \cdot 343} h^2 \rightarrow$$

basta tomar  $h = \frac{1}{2} \rightarrow I \approx [f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)] = \frac{1}{4} [0 + \frac{8}{31} + \frac{2}{7}] = \frac{59}{434}$  con error  $< 10^{-2}$ .

**Ej.** Dibujar la gráfica de  $r(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$  y encontrar, si existen, los  $x$  en los que alcanza sus extremos la función  $R(x) = \int_0^x r$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

$$r \in C^\infty(\mathbf{R}) . r(x) \rightarrow 0 . r(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\gtrless} 0 \text{ si } x \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\gtrless} 1 . r'(x) = -\frac{3x^4-4x^3-1}{[x^4+1]^2} , r''(x) = -\frac{4x^2[3x^5-5x^4-5x+3]}{[x^4+1]^3} .$$

$P = 3x^4 - 4x^3 - 1$  tiene 1 raíz positiva  $x_+$  [+ + -] y 1 negativa  $x_-$  [+ - -].

$$P(-1) = -6 , P(0) = 1 , P(1) = 2 , P(2) = -15 \Rightarrow x_- \in [-1, 0] \text{ y } x_+ \in [1, 2]$$

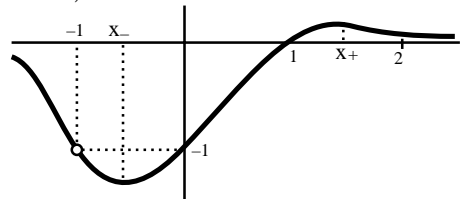
$\Rightarrow r$  decrece hasta  $x_-$ , crece hasta  $x_+$  y decrece a partir de entonces.

$x = -1$  inflexión; en  $x = 0$  no hay (no cambia de signo  $r''$ ); los otros puntos de inflexión los darían las raíces (ya no hay más enteras y negativas sólo la  $-1$ ) de  $3x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 8x + 3$  (se pueden hallar haciendo  $z = x + 1/x$ ).

Valores:  $r(-1) = -1, r(0) = -1$  (Rolle confirma  $x_-$ ),

$$r(-2) = -\frac{3}{17} , r(2) = \frac{1}{17} ;$$

$$r'(-1) = -\frac{3}{2} , r'(0) = 1 \text{ (otra vez } x_-), \dots$$



A la vista de la gráfica de  $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  decrece si  $0 \leq x \leq 1$  [añadimos áreas negativas] y luego crece [lo mismo se deduce del signo ya analizado de  $R'(x) = r(x)$ ]. El mínimo se da, pues, si  $x = 1$ .

Aproximemos el valor de  $R(1)$  :

$$\text{Por Simpson con } h = 1/2 : I_1 \equiv \int_0^1 r \approx \frac{1}{6}[-1 - \frac{4 \cdot 8}{17} + 0] = -\frac{49}{102} \approx -0.480 \text{ (sin cota del error)}$$

Por Taylor:  $r(x) = [x - 1][1 - x^4 + x^8 - \dots] = -1 + x + x^4 - x^5 - x^8 + \dots$  si  $|x| < 1 \rightarrow$

$$I_1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \dots$$

[en principio, nada nos garantiza que podamos integrar hasta  $x = 1$  (ahí diverge la serie de  $r$ ), pero parece que va bien, pues la serie de  $I_1$  converge:

$$S_1 = -1 < S_5 \approx -0.578 < \dots < I_1 < \dots < S_7 \approx -0.401 < S_3 = -0.3 \text{ (coherente con Simpson)}$$

Podría no haber máximo de  $R$  (el  $[0, \infty)$  es no acotado). Si la integral impropia entre 1 e  $\infty$  fuese divergente (que no lo es pues  $r(x)$  se parece a  $x - 3$  en el  $\infty$ ), la  $R$  tendería a  $\infty$ ; si fuese convergente y tendiese a un valor  $I_2$  mayor que  $|I_1|$ ,  $R$  tendería hacia  $I_1 + I_2 > 0$  (valor que no alcanzaría); y si converge hacia un valor menor que  $|I_1|$  entonces el máximo se alcanza en  $x = 0$  (y vale  $R(0) = 0$ ). Veamos que esto último es lo que sucede realmente:

En  $[1, \infty)$  es  $f \geq 0$ . El criterio de comparación por desigualdades da cotas fáciles de la impropia:

$$I_2 \equiv \int_1^\infty r < \int_1^\infty \frac{x}{x^4+1} = [\arctan x^2]_1^\infty = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{8} < 0.4 , \text{ o bien:}$$

$$I_2 < \int_1^\infty \frac{x-1}{x^4} = [\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}]_1^\infty = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < 0.17 , \text{ bastante mejor cota.}$$

Si  $x \rightarrow \infty$ ,  $R(x) \rightarrow \int_0^1 f + \int_1^\infty f = I_1 + I_2 < 0$ , como se deduce de las cotas halladas  $\Rightarrow$  el máximo se da para  $x = 0$ .

[Con mucho esfuerzo podríamos hallar la primitiva  $R$  y el valor exacto de ambas integrales. Lo primero es factorizar el denominador, para lo que necesitamos las raíces de  $x^4 = -1$ . Probando con  $a \pm bi$  en  $x^2 = \pm i$  o, mejor, utilizando las fórmulas para raíces de complejos del próximo capítulo obtenemos que son  $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$ . Así:

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_0^x \frac{tdt}{t^4+1} = \int_0^x \frac{tdt}{[t^2+\sqrt{2}t+1][t^2-\sqrt{2}t+1]} = \dots \\ &= \arctan x^2 - \frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{4} [\arctan(x\sqrt{2}+1) + \arctan(x\sqrt{2}-1)] \end{aligned}$$

Con calculadora obtenemos:  $I_1 \approx -0.474$  (buena aproximación la de Simpson),  $I_2 \approx 0.149$ ].

## 5.6. Aplicaciones

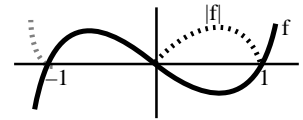
### Áreas planas

Ya vimos que la integral no describe exactamente un área, sino una suma de áreas con signo. Por tanto, para hallar el área encerrada entre el eje  $y=0$  y la gráfica de una función  $f$  habrá que sumar las integrales de  $f$  en los intervalos en que esté por encima del eje y restar las integrales cuando  $f$  quede por debajo. Esto es equivalente a integrar  $|f|$ . Así:

**Ej.** Hallar el área de la región encerrada entre el eje horizontal y la gráfica de  $f(x) = x^3 - x$ .

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 |f| = \int_{-1}^0 f - \int_0^1 f \underset{f \text{ impar}}{=} -2 \int_0^1 f = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2}$$

[la  $\int_{-1}^1 f$  (que es 0 por ser  $f$  impar) no representa el área rayada]

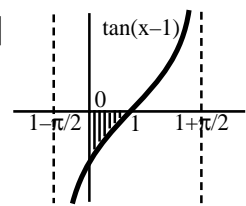


**Ej.** Determinar el área de la región acotada limitada por los ejes y la gráfica de  $h(x) = \tan(x - 1)$ .

[Sabemos que la gráfica es la de  $\tan x$  trasladada una unidad a la derecha]

$$\text{Área} = \int_0^1 |h| = - \int_0^1 \tan(x-1) dx = \log |\cos(x-1)| \Big|_0^1 = -\log(\cos 1) > 0$$

(porque  $\cos 1 < 1$ ; las áreas deben salir siempre positivas)



Más en general, el **área comprendida entre las gráficas de  $f$  y  $g$**

**en el intervalo  $[a, b]$**  viene dada por  $\int_a^b |f - g|$

**Ej.** Determinar el área de la región encerrada entre las gráficas de  $f(x) = x^2 - 2x$  y  $g(x) = x$ .

Las gráficas se cortan si  $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x = 0$  ( $y = 0$ ) ó  $x = 3$  ( $y = 3$ ).

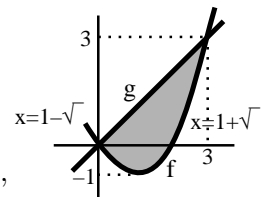
En  $[0, -3]$  la gráfica de  $g$  está por encima de la de  $f$ , por tanto:

$$A = \int_0^3 [g - f] = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \frac{9}{2}$$

O bien de otra forma (más complicada en este caso, pero mejor en otros), integrando respecto a  $y$ :  $y = x^2 - 2x \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+y} \rightarrow$

$$A = \int_{-1}^0 [1 + \sqrt{1+y} - (1 - \sqrt{1+y})] dy + \int_0^3 [1 + \sqrt{1+y} - y] dy$$

$$= \left[ \frac{4}{3}(1+y)^{3/2} \right]_{-1}^0 + \left[ y + \frac{2}{3}(1+y)^{3/2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$



**Ej.** Hallar (sin calculadora) con un error menor que 0.04 el valor aproximado del área de la región comprendida entre la gráfica de  $h(x) = \arctan x^2$  y la recta  $y = \frac{\pi}{4}$ .

$h$  par,  $h \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $h'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$  (crece si  $x > 0$ )  $\rightarrow$

corta  $y = \frac{\pi}{4}$  sólo si  $x = \pm 1 \rightarrow \text{Área} = \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^1 \arctan(x^2) dx$ .

Hallar la primitiva es posible pero largo:

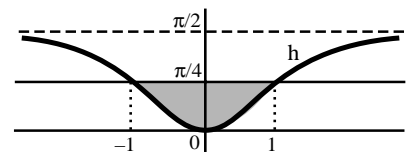
$$\int \arctan(x^2) dx = x \arctan(x^2) - \int \frac{2x^2 dx}{1+x^4} = \dots$$

[y los log y arctan del resultado no podríamos evaluarlos sin calculadora].

Con trapecios o Simpson salen valores desconocidos del arctan (y sería difícil acotar el error). Así que lo mejor es integrar el desarrollo de Taylor [se puede llegar hasta  $x = 1$ ] y acotar el error de la serie alternada que sale:

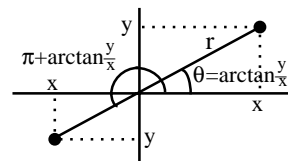
$$2 \int_0^1 [x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^{10} - \frac{1}{7}x^{14} + \dots] dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{21} + \frac{2}{55} - \dots \approx \frac{4}{7}, \text{ con error } < \frac{2}{55} < \frac{2}{50} = 0.04$$

Por tanto, Área  $\approx 1.571 - 0.571 = 1.00$  con error  $< 0.04$  (con ordenador: Área  $\approx 0.974991$ ).



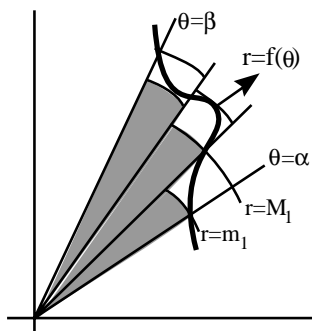
## Áreas en coordenadas polares.

Un punto  $P$  del plano de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  se puede describir además por un par de coordenadas polares  $(r, \theta)$  siendo  $r$  la distancia de  $P$  al origen y  $\theta$  el ángulo en radianes comprendido entre el semieje de las  $x$  positivas y la semirrecta que une el origen con  $P$ .



Unas coordenadas se pueden obtener de otras utilizando que:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x} [+ \pi], \text{ si } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) [\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})]$$



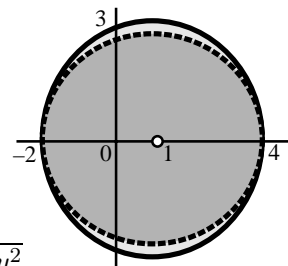
Para hallar el área de una región  $R$  como la del dibujo, acotada por las semirrectas  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$  y la curva  $r = f(\theta)$ , con  $f(\theta) \geq 0$ , dividamos el ángulo  $\beta - \alpha$  en  $n$  partes iguales (de longitud  $\Delta\theta$ ). Como el área de un sector circular de radio  $r$  y ángulo  $\theta$  es  $r^2\theta/2$ , si  $m_k$  y  $M_k$  son el mínimo y el máximo de  $f(\theta)$  en cada sectorcillo, se tiene que el área de cada uno de ellos está comprendida entre  $m_k^2\Delta\theta$  y  $M_k^2\Delta\theta \rightarrow \sum m_k^2\Delta\theta \leq \text{área de } R \leq \sum M_k^2\Delta\theta$ . Como estas sumas son las sumas inferior y superior de  $f^2$  en  $[\alpha, \beta]$  deducimos que:

$$\text{Área de } R = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta}$$

**Ej.** Hallar el área de la región acotada por la curva  $r = 3 + \cos \theta$ .

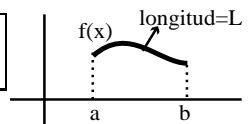
$$A = \int_0^{2\pi} [3 + \cos \theta]^2 d\theta = \int_0^{2\pi} [9 + 6 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta] d\theta = \frac{19\pi}{2}$$

$R$  no es el círculo de centro  $(1, 0)$  y radio 3; el área de este círculo es  $9\pi$  y su expresión en polares es  $r^2 - 2r \cos \theta - 8 = 0 \rightarrow r = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 8}$ ; la curva dada en cartesianas es muy complicada:  $x^2 + y^2 - x = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ .

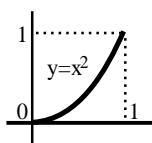


Con técnicas similares a las del área en polares se deducen el resto de fórmulas de la sección:

**Longitud de la gráfica** de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ :  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$



(lo natural es probar la fórmula tratando las integrales de línea de Cálculo II)



**Ej.** Hallar la longitud del tramo de la parábola  $y = x^2$  que une los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[ u = 2x + \sqrt{1 + 4x^2} \right] = \frac{1}{8} \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{[1+u^2]^2}{u^3} du = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log 2 + \sqrt{5}}{4} \approx 1.48$$

**Ej.** Probar que la longitud  $L$  del tramo de  $y = x^3$  que une  $(0, 0)$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$  cumple  $\frac{1}{2} < L < \frac{9}{16}$ .

$$y' = 3x^2 \rightarrow L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 9x^4} dx \text{ (primitiva no calculable).}$$

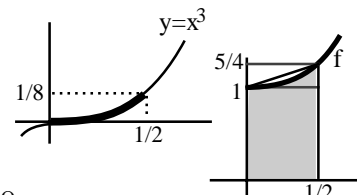
$$f(x) \equiv [1 + 9x^4]^{1/2} = 1 + \frac{9}{2}x^4 - \frac{81}{8}x^8 + \dots \text{ si } |9x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow L = \left[ x + \frac{9}{10}x^5 - \frac{9}{8}x^9 + \dots \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{320} - \frac{9}{4096} + \dots,$$

[válido por estar  $[0, 1/2]$  dentro del intervalo de convergencia]

La serie de  $L$  es decreciente y alternada a partir de segundo término

$$\rightarrow \frac{1}{2} = S_1 < S_3 < \dots < L < \dots < S_2 = \frac{169}{320} < \frac{9}{16}.$$



De otra forma (la integral puede describir el área limitada por  $f$  en  $[0, \frac{1}{2}]$ ):

$$\text{área rectángulo} = \frac{1}{2} < L \text{ área trapecio} = \frac{9}{16} \text{ [es fácil ver que } f \text{ es convexa en ese intervalo].}$$

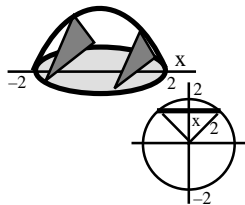
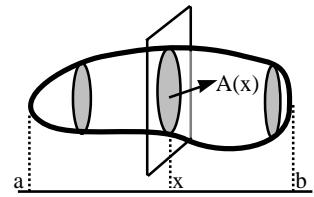
[La acotación  $L > 1/2$  era clara geoméricamente antes de hacer ninguna cuenta].

**Volúmenes (sencillos):**

Aunque el instrumento natural para calcular volúmenes son las integrales múltiples que se estudian en Cálculo II, hallamos algunos para los que bastan integrales de funciones de una variable.

Volumen de un sólido que se extiende desde  $x = a$  hasta  $x = b$ ,

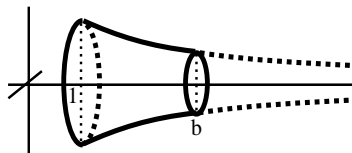
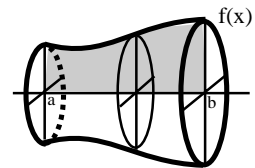
conocida el área  $A(x)$  de cada sección plana:  $V = \int_a^b A(x)dx$



**Ej.** Un sólido tiene base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

$$A(x) = \text{área triángulo de base } 2\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}(4-x^2), V = 2 \int_0^2 A(x)dx = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

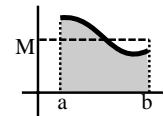
En particular, volumen de un **sólido de revolución** engendrado al girar en torno al eje  $x$  la región comprendida entre la gráfica de  $f$  ( $f(x) \geq 0$ ) y el eje  $x$  en  $[a, b]$ . El área de cada sección [círculo de radio  $f(x)$ ] es  $A(x) = \pi[f(x)]^2$ . Por tanto,  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$



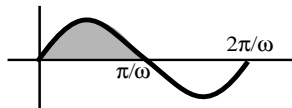
**Ej.** El volumen obtenido al girar la región determinada por  $g(x) = \frac{1}{x}$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[1, b]$ ,  $b > 1$  es  $V_b = \pi \int_1^b [\frac{1}{x}]^2 dx = \pi[1 - \frac{1}{b}]$   
 $V_b \rightarrow \pi$  : el volumen del sólido infinito es finito (impropia convergente)

**Valor medio** de una función en un intervalo; se define:

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$



(si  $f \geq 0$ , es la altura de un rectángulo de base  $b - a$  y área igual a la limitada por la gráfica de  $f$ )



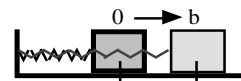
**Ej.** Hallar el valor medio de  $f(x) = A \text{sen } \omega x$  en el semiperiodo  $[0, \pi/\omega]$ :

$$M = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \text{sen } \omega x dx = \frac{2A}{\pi} \text{ (el valor medio en } [0, 2\pi/\omega] \text{ es 0)}$$

**Trabajo de una fuerza variable:** un punto se mueve en el eje  $x$  sometido a una fuerza  $f(x)$  función sólo de  $x$ . El trabajo realizado por la fuerza  $f$  para mover el punto desde  $a$  hasta  $b$  es

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

**Ej.** El trabajo preciso para estirar un muelle una longitud  $b$  desde su posición de equilibrio es  $\int_0^b cx dx = \frac{1}{2}cb^2$



Sea una varilla de densidad lineal variable  $\rho(x)$  que ocupa desde  $a$  hasta  $b$ . Su **masa**  $m$ , su **centro de gravedad**  $x^*$  y su **momento de inercia**  $I$  respecto a 0 son:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx, \quad x^* = \int_a^b x\rho(x)dx, \quad I = \int_a^b x^2\rho(x)dx$$

**Distancia** recorrida en el intervalo de tiempo  $[a, b]$  por un móvil de velocidad  $v(t)$  :

$$D = \int_a^b v(t)dt$$