CALCULO I. GRUPOS A y D. 22 de noviembre de 2004

1. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{\ln\left|1-x^2\right|-1}$ es:

a) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ b) $\left(-\infty,-\sqrt{1+e}\right]\cup\left[\sqrt{1+e},\infty\right)$ c) $\left[\sqrt{1+e},\infty\right)$

2. El límite de la sucesión $a_n=n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es:

a) ∞ b) $-\infty$ c) $1-e$

3. Sea $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{-x}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-1} f\left(x\right)=0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\cos\frac{1}{n}\right)=0$

4. La función $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^3} & \text{si } x\neq 0\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$, en el punto $x=0$ es:

a) continua y derivable b) continua pero no derivable c) ni continua ni derivable

5. Sea $f(x)=2x+e^x$ y sea f^{-1} su función inversa. El valor de $\left(f^{-1}\right)'(1)$ es:

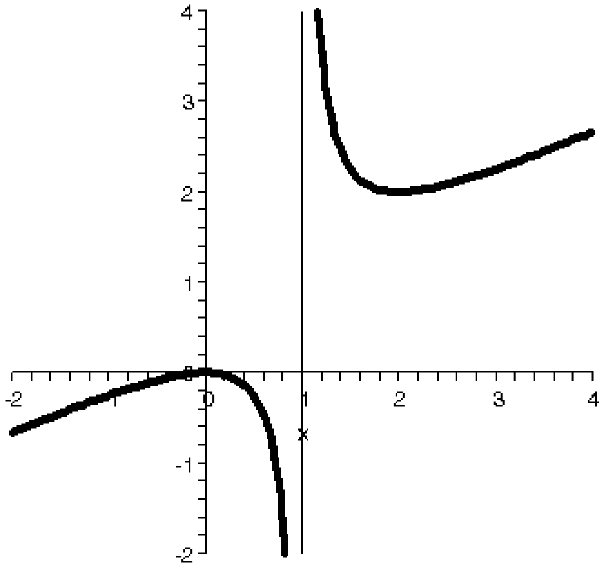
a) $\frac{1}{2+e}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

6. Los valores máximo y_M y mínimo y_m de la función $f(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}$ en el intervalo $[0,1]$ verifican:

a) $y_M<7; y_m<4$ b) $y_M<5; y_m\geq 4$ c) $y_M>7; y_m$ no existe.

7. La gráfica de la figura corresponde a la función:

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ b) $\dfrac{x}{x-1}$ c) $\dfrac{x^2}{2(x-1)}$



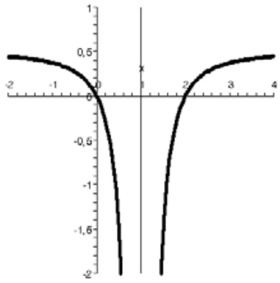
8. La ecuación $xe^{-x} = \dfrac{1}{4}$:

a) tiene dos soluciones reales
b) tiene una única solución real
c) no tiene soluciones reales.

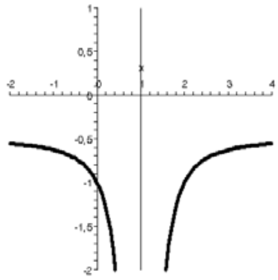
9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función $f(x) = \dfrac{\cos x}{\ln(x^2+1)}$ es cierta?

a) es par y está acotada en su dominio.
b) no es par ni impar.
c) es par y su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

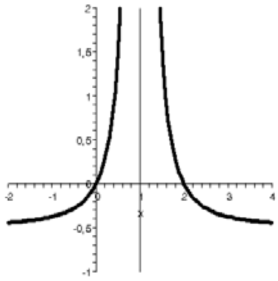
10. La gráfica de la derivada de la función cuya gráfica se representa en la figura de la pregunta 7 es:



a)



b)



c)

Soluciones.

1. Si x está en el dominio, tiene que verificar:

$$\ln|1-x^2|\geq 1 \Leftrightarrow |1-x^2|\geq e \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2\geq e \\ \text{ó} \\ 1-x^2\leq -e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\leq 1-e \ \ \text{(imposible)} \\ \text{ó} \\ x^2\geq 1+e \end{cases}$$

Luego, x está en el dominio si y sólo si:

$$|x|\geq\sqrt{1+e} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq\sqrt{1+e} \\ \text{ó} \\ x\leq -\sqrt{1+e} \end{cases}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **b).**

2. a_n es la diferencia entre una sucesión que diverge a infinito y una que tiende a e. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. La respuesta correcta es la **a).**

3. $$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-n\right)e^{-1/n}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{-x}=0$$

Como $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{-x}=0$, f es continua en 1. Entonces $\lim_{n\to\infty} f\left(\cos\frac{1}{n}\right)=0.$

Luego, la respuesta correcta es la **a)**.

4. $\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x^3}=\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x^3}=-\frac{\pi}{2}$

Luego, la función no es continua ni derivable en x=0. La respuesta correcta es la **c).**

5. $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}=\dfrac{1}{2+e^{f^{-1}(1)}}$. Como $f^{-1}(1)=0$, la respuesta correcta es la **b)**.

6. La derivada de $f(x)$ es: $f'(x) = -3\dfrac{(x+3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, que es positiva en [0,1/3] y negativa en [1/3,1]. Luego el máximo de la función se alcanza para x=1/3 y vale:

$$y_M = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

El mínimo puede estar en 0 o 1. Los valores de f en estos puntos son:

$$f(0) = 4 \quad \text{y} \quad f(1) = \frac{7}{2}$$

Por tanto, el mínimo de la función es y_m= 7/2. La respuesta correcta es la **a).**

7. Descartamos a) porque el dominio de dicha función es $(1,\infty)$. La derivada de b) es:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x \neq 1$$

Luego, tampoco b) es compatible con el comportamiento de la gráfica, que presenta un mínimo local en x=2 y un máximo local en x=0. La respuesta correcta es por tanto la **c).**

8. La función $f(x) = xe^{-x}$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada es:

$$f'(x) = e^{-x}(1-x)$$

Luego la función es creciente en $(-\infty,1]$ y decreciente en $[1,\infty)$. El máximo de la función se alcanza en x=1 y vale $f(1) = 1/e > 1/4$. Como $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, la ecuación del enunciado tiene una solución en el intervalo $(0,1)$ y otra en el intervalo $(1,\infty)$. La respuesta correcta es la **a).**

9. La función es par y diverge en x=0. Por tanto, la respuesta correcta es la **c).**

10. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la pregunta 7 coinciden con los intervalos donde la derivada es positiva y negativa, respectivamente, en la respuesta **a).**