

Elementos de Física y Matemáticas (2003/04). Cálculo (preliminares)

1. Simplifica las siguientes expresiones:

$$(-2^3)^2, 2^{(-3)^2}, (-2)^{3^2}, 8^{2/3}, \left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}, \left(\frac{9}{4}\right)^{-3/2}, 3^{-4} 2^{-4/6} 9^2 2^{13/15} 4^{7/5}, \\ (3 + \sqrt{8})^3 (3 - \sqrt{8})^3, \frac{1}{(n-1)!} - \frac{n-1}{n!}, \frac{n!}{(n-3)!(n^2-2n)}.$$

2. Halla todos los números reales x que cumplen cada igualdad o desigualdad:

$$x^2 - x - 2 = 0, x^2 + x + 2 = 0, x^4 - x^2 - 2 = 0, \frac{2}{x^2-2x} + \frac{3}{x^2-4x+4} = 1, \\ \sqrt{x+9} - 2\sqrt{x+1} = 0, \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x} = 0, 8^x = 2^{-x^2}, 2\log x + \log(x+2) = 0, \\ -3x^3 > \frac{1}{9}, \frac{2x}{3} + \frac{5x}{12} - 3 \leq \frac{4x}{15} + \frac{1}{2}, 7 + x + \frac{6}{x} < 0, 3^{4+x^2-x^3} < 1.$$

3. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

- i) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\forall a, b \neq 0$; ii) $\sqrt{a^2} = -a$, $\forall a \leq 0$; iii) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, $\forall a, b > 0$;
iv) $4^{a+b} = 4^a + 4^b$, $\forall a, b$; v) $(a^b)^c = (a^c)^b$, $\forall a > 0$; vi) $\log(ab) = \log a + \log b$, $\forall a, b$;
vii) $a < b \Rightarrow ac < bc$, $\forall a, b, c$; viii) $a > a^3$, si $0 < a < 1$; ix) $a^b > 1$, $\forall a > 1, \forall b$.

4. Calcula $\binom{4}{4}, \binom{4}{3}, \dots, \binom{4}{0}$: (i) Mediante el triángulo de Pascal,

(ii) con la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, (iii) con la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$.
Utilizando los resultados anteriores, escribe el desarrollo de $(a - 3x^2)^4$.

5. Prueba que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ y relacionalo con el triángulo de Pascal.

6. Calcula $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ para $n = 2, 3, 4, 5$ y 6 .

¿Cuál crees que es la suma para cualquier n ? Dedúcelo de la fórmula del binomio.

¿Cuánto vale $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$?

7. Calcula:

- (i) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1024$,
(ii) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$,
(iii) $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/1024$,
(iv) $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$.

8. Si $a_1 = -3$ y $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{5}$, calcula a_4 , a_{28} y la suma $S = a_4 + a_5 + \dots + a_{28}$.

¿Puedes encontrar 25 enteros en progresión aritmética cuya suma sea la misma S ?

¿Y si son 24 los enteros?

9. Demuestra que:

- i) n impar $\Rightarrow n^3$ impar. ii) n^2 par $\Rightarrow n$ par. iii) $\sqrt{2}$ es irracional (esto es difícil).

Elementos de Física y Matemáticas (2003/04). Cálculo (derivadas)

1. Halla la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ a las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, f(x) = \frac{3x}{7} - 12, f(x) = 3x^2 + 2x - 1, f(x) = (2x - 3)^{-7/3}.$$

Esboza un dibujo de las gráficas de las funciones y de sus tangentes.

2. Determina para qué valores de x se anulan las derivadas segundas de las funciones:

$$f(x) = x^2 + 7x - 5 + \frac{8}{x-1}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}, f(x) = \sin x \cos x, f(x) = \ln(1 + \cos x).$$

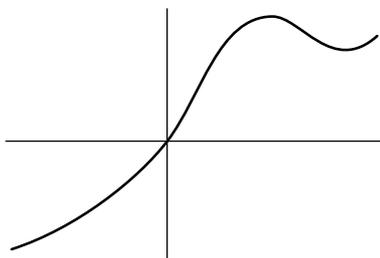
3. Sea $f(x) = 3 + x^5(x - 3)^4$.

Prueba que su función derivada $f'(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo $(0, 3)$.

4. Demuestra que si $x > 0$, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Da una demostración visual de la desigualdad anterior.

5. Representar la gráfica de las funciones: i) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, ii) $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, estudiando máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento, asíntotas, puntos de inflexión, concavidad y convexidad.

6. En esta gráfica se ha representado la derivada de una cierta función $f(x)$. ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación $f(x) = 0$? Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones distintas, ¿pueden ambas tener el mismo signo?



7. Sea O el punto $(2, 1)$, y sea L la gráfica de $f(x) = 1 - 3x$. ¿Cuál es el punto de L que dista menos de O ? ¿Y el que dista más?

8. Se tiene un alambre de 2 m de longitud y se desea dividirlo en dos partes, para formar con la primera un cuadrado y con la segunda un círculo. ¿Cómo habrá que hacerlo para que la suma de las áreas de las dos figuras resultantes sea máxima? ¿Y mínima?

9. Calcula estos límites usando si es preciso la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x}{(x - \pi/2)^2}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Elementos de Física y Matemáticas (2003/04). Cálculo (trigonometría)

1. Expresa los siguientes ángulos en radianes: 7° , 15° , 18° , 120° , 150° , 270° .
Y los siguientes ángulos, que están en radianes, en grados: $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{6}$, 3π , 0.017 .

2. Representa las gráficas de las siguientes funciones:

$$\sin^2 x, \tan \frac{x}{2}, \sec 2x, \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \sin \frac{\pi x}{180}.$$

3. Utilizando las expresiones de $\sin(A + B)$, y de $\cos(A + B)$, se pide calcular en función de $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$ y $\cos B$, simplificando al máximo las expresiones finales, las siguientes cantidades:

(i) $\tan(A + B)$, (ii) $\cos 2A$, (iii) $\sin 3A$, (iv) $\sin \frac{A}{2}$, (v) $\cos \frac{A}{2}$, (vi) $\tan \frac{A}{2}$.

Utilizando el Teorema de Pitágoras deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/3)$.
Calcula además: $\tan(\pi/8)$, $\sin(\pi/12)$ y $\cos(\pi/12)$.

4. Sabiendo que $\sin \alpha = 1/3$ y que α está en el segundo cuadrante, se pide calcular $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan \alpha$ y $\sin 3\alpha$, usando tan sólo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas.

5. Halla todos los números reales x que verifican:

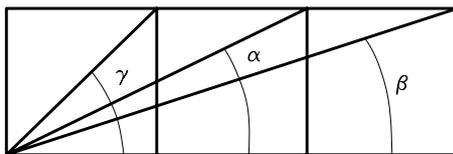
(i) $\sin(2x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(5\pi)$, (ii) $3\tan x + 2\cos x = 0$.

6. Sabiendo que desde cierta distancia un edificio se ve bajo un ángulo de 60° , y alejándose 200 m se ve bajo un ángulo de 30° , ¿cuál será la altura del edificio, y cuál será la distancia que nos separaba de él en la primera posición?

7. La base de un triángulo mide 15 metros y los dos ángulos que se apoyan en ella son de 30° y 45° . ¿Cuánto valen los restantes lados y el ángulo que falta por determinar?

8. En una circunferencia de centro O, considera dos puntos diametralmente opuestos A y C. Sitúa un punto, B, en una posición arbitraria entre A y C (haz un dibujo) ¿Qué relación se da entre los ángulos BAO y BOC?

9. Los tres cuadrados son iguales, ¿cuánto vale $\alpha + \beta + \gamma$?



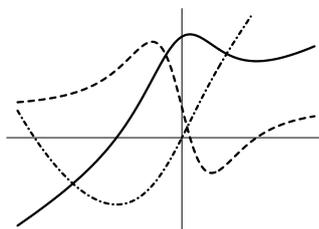
Elementos de Física y Matemáticas (2003/04). Cálculo (integrales)

1. Hallar las siguientes primitivas:

$$\int x(x^2 + 3)^2 dx, \int \sqrt{x + 5} dx, \int \frac{x+1}{x+9} dx, \int \frac{x+1}{x^2+9} dx, \int \sin x \cos x dx, \int \tan x dx$$

2. Sabiendo que $f(x)$ es continua, que $f(0) = 0$ y que $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, calcula $f(x)$ y esboza su gráfica.

3. En esta gráfica se encuentra una función derivable $f(x)$, su función derivada $f'(x)$ y una primitiva $F(x)$. Identifica razonadamente cada curva con su función correspondiente.



4. Calcula el área de estas regiones:

- Región limitada por el eje x y por la gráfica de $f(x) = \sin x$, entre $x = 0$ y $x = \pi$.
- Región limitada por las gráficas de $f(x) = x + 1$ y $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
- Región finita encerrada entre el eje x y la gráfica de $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$.

5. Hallar el área de la región plana acotada limitada por la curva $y = 1/(x^2 + 1)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de la curva.

6. Una función está definida para $x \in [0, 7]$ del siguiente modo:

$f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 4$, $f(x) = 5 - x$ para $4 < x \leq 5$, $f(x) = -1$ para $5 < x \leq 7$.
Dibuja $f(x)$ y su derivada $f'(x)$. Sea $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcula $F(4)$, $F(5)$ y $F(7)$.
Dibuja aproximadamente la gráfica de $F(x)$.

7. Sin calcular las primitivas, ¿puedes decir en cada caso cuál es el valor correcto de la integral entre las tres opciones que se ofrecen?:

- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 x dx$: a) $\frac{\pi}{4} - 1$, b) $\frac{35\pi}{138}$, c) π .
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x dx$: a) $\frac{5\pi}{16}$, b) $\frac{\pi}{8}$, c) 0 .
- $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 - 8}$: a) $-\frac{\ln 3}{24} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72}$, b) $\ln \frac{9}{8}$, c) $\frac{33}{4}$.