Grupos A, B, C y D de CÁLCULO I (curso 2004/2005). Problemas 1-18.

1. Encontrar todos los reales x para los que:

a) $x^3 + x^2 > 2x$ b) $|4-7x| = 4 - x^2$ c) $|x||x-2| < 1$ d) $\frac{x-2}{x+2} \geq 0$
e) $|1 - \frac{1}{x}| \leq 2$ f) $|x| + |x-3| \leq 5$ g) $|x^2 - 5\pi^2| \geq 4\pi^2$ h) $|x+1| < x$

2. Precisar si tienen supremo, ínfimo, máximo, mínimo y si son abiertos o cerrados los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}$:

a) $\{x : |x| > 2\} - \{7\}$; b) $\{x \in \mathbf{Q} : x^2 \leq 4\}$; c) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$;
d) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$; e) $\{10^{-7}n : n \in \mathbf{N}\}$; f) ϕ .

3. Sean $f(x) = x^2 - x - 2$; $g(x) = \sqrt{x+2}$; $h(x) = 2/x$.
Determinar el dominio de $(h \circ f) \cdot g$, $h \circ f \circ g$, $g \circ f + g \circ h$ y $g \circ (f+h)$. Hallar $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} g$, $\operatorname{im} h$.
Comprobar que g es inyectiva en todo su dominio y calcular g^{-1} indicando su dominio.

4. a) Expresar $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. b) Si α está en el tercer cuadrante y $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$, hallar $\cos 3\alpha$ y precisar en qué cuadrante está 3α .

5. Hallar todos los números reales x tales que:
a) $\cos 2x - 5\cos x = 2$, b) $\log(3x+2) = 3\log x$, c) $e^{2|\log x|} < 8x$, d) $|\tan x| > 1$.

6. Sean a) $a_n = \frac{(-1)^n + n}{1+n}$, b) $b_n = 10^{7-n}$ y c) $c_n = \frac{300\cos n - 2n}{n^2}$. Hallar un N a partir del cual sus términos difieran del límite en menos de $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.01$.

7. ¿Tienen $a_n = \operatorname{sen}\frac{n^2\pi}{4} - \frac{7}{n}$, $b_n = 2^{(-2)^n}$ y $c_n = \cos n + n$ alguna subsucesión convergente?

8. Probar a partir de la definición de límite que: $\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow \{|a_n|\}$, $\{a_n^2\}$ convergentes.
¿Es cierta la implicación inversa en alguno de los dos casos?
Demostrar que $\{a_n\} \to a > 0 \Rightarrow \{\sqrt{a_n}\} \to \sqrt{a}$, y que $\{a_n\} \to \infty \Rightarrow \{\sqrt{a_n}\} \to \infty$.

9. Calcular el límite de las sucesiones que sean convergentes:

a) $\frac{n^2-30n}{3-100n}$ b) $\frac{17\sqrt{n+3}+9}{\sqrt{n^2+1}-1}$ c) $(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - 1\right)$ d) $\left(\sqrt{2n^2-1} - 1\right)^4$
e) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$ f) $\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2-1}{2n}$ g) $(-1)^n\sqrt{n} - n$ h) $\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$
i) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ j) $\frac{n!}{n^n}$ k) $n\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}} - \sqrt{2}\right)$ l) $1 + \cdots + \frac{1}{2^n}$

10. Precisar para qué valores de $a, b > 0$ convergen las sucesiones:
a) $a_n = \sqrt{n^2 + an} - bn$; b) $\left(a + \frac{b}{n}\right)^n$; c) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$.

11. Definimos la sucesión a_n mediante: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{2}$. Probar que tiene límite y calcularlo. [Demostrar por inducción que $\{a_n\}$ es creciente y que $a_n < \sqrt{2} + 1$].

12. Utilizando únicamente las definiciones probar que:
a) $f(x) = 1 + \sqrt{4+x}$ es continua en $x = 0$, b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{x^3} = \infty$.

13. Determinar si $f+g$, $f \cdot g$ y $f \circ g$ son necesariamente pares o impares en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar. Probar que si f es impar y tiene límite en $x = 0$, entonces ese límite es 0 .

14. Hallar una f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f(x)|$ sea continua $\forall x$.
¿Existe alguna función que sea continua en todo $\mathbf{R}$ menos en un único punto?
¿Y alguna que sea continua en un único punto de $\mathbf{R}$ y discontinua en todos los demás?

15. Hallar (si existen) los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\log\frac{1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-8}{x-2}$; i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$; j) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\operatorname{sen} x}$; k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{x^2-1}$; l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3+2^{1/x}}$; n) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3+2^{1/x}}$; ñ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3+2^{1/x}}$; o) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x$; p) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}-x$;

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{100}}{(2x+5)^{100}}$; r) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen}^3 x}{5x+6}$; s) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+5}$; t) $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen} x$.

16. Probar que $x^5=2^x$ tiene una solución i) menor que 2 , ii) mayor que 2 .

17. Sea $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ continua y tal que $\operatorname{im} f\subset[0,1]$. Probar que entonces existe algún $x\in[0,1]$ tal que $f(x)=x$ [a x se le llama punto fijo de f].

18. Probar que si f es continua en $[a,\infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ es finito, entonces f es acotada en $[a,\infty)$.
¿Alcanza siempre f su valor máximo en dicho intervalo?

Grupos A, B, C y D de CÁLCULO I (curso 2004/2005). Problemas 19-43.

19. Hallar la primera y segunda derivadas de las funciones siguientes indicando su dominio:

$$\text{a) } f(x)=x^3\operatorname{sen}\tfrac{1}{x}\,,\ f(0)=0\ ;\quad \text{b) } g(x)=x\log|x|\,,\ g(0)=0\ ;\quad \text{c) } h(x)=\arctan\big(1-\tfrac{1}{\sqrt{x}}\big)\ ;$$

$$\text{d) } k(x)=|x^{7/3}-x^2|\ ;\quad \text{e) } l(x)=\arccos(\tan^2(\operatorname{arcsen}x))\ ;\quad \text{f) } m(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{3x+1}}.$$

20. Sea $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & \text{si } 0<|x|\le 1\\ a+bx^2 & \text{si } |x|>1\end{cases}$. Hallar a y b para que existan $f'(1)$ y $f'(-1)$.

21. Determinar para qué puntos de la gráfica de $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$ la recta tangente pasa por el origen.

22. Hallar, si existe, un $c\in(0,1)$ en el que la tangente a $f(x)=\arctan\frac{x}{x-2}$ sea paralela a la recta que une $(0,0)$ y $(1,\frac{\pi}{4})$.

23. Hallar el punto de corte de las tangentes a la gráfica de $g(x)=\left|1-\frac{4}{x}\right|$ en $x=-2$ y $x=2$.

24. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y+yx^2+y^3=3$ en el punto $(1,1)$.

25. Sea $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1-|x|}$. Determinar si es derivable en $x=0$. Hallar, si existen, el valor máximo y el valor mínimo de f en el intervalo $[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4}\,]$.

26. Encontrar (si existen) los valores máximo y mínimo de $f(x)=\operatorname{arcsen}x+\sqrt{3}\,\log|2-x|$.

27. Sea $f(x)=x+2\cos x$. Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervalo $[0,1]$. Probar que existe f^{-1}, función inversa de $f(x)$ para $x\in[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,]$, y hallar la derivada $(f^{-1})'(2)$.

28. Hallar (si existen) los valores máximo y mínimo de estas funciones en los intervalos indicados:

$$\text{a) } f(x)=2x-9x^{2/3} \text{ en } [-8,64]\ ;\quad \text{b) } g(x)=x+2|\cos x| \text{ en } [0,\pi]\ ;$$

$$\text{c) } h(x)=\sqrt{(x-1)^2+9}+\sqrt{(x-8)^2+16} \text{ en } \mathbf{R}\ .$$

29. Probar que $f(x)=x^2-x\operatorname{sen}x-\cos x$ tiene exactamente dos ceros.

30. Sea $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Determinar su dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Probar que existe un único $c\in\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ tal que $f(c)=\frac{2}{3}$.

31. Precisar cuántos ceros reales tiene el polinomio $P(x)$ cuya derivada es $P'(x)=3x^2+2x-8$ y tal que la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ pasa por $(1,-1)$.

32. Dibujar las gráficas de las funciones:

$$\text{a) } \frac{x^2-4}{x^2-9}\qquad \text{b) } \sqrt{\frac{x+3}{x^2}}\qquad \text{c) } x\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}\qquad \text{d) } \arctan(3x-x^3)$$

$$\text{e) } \frac{\cos x}{1+|\operatorname{sen}x|}\qquad \text{f) } \operatorname{sen}(\tan x)\qquad \text{g) } \mathrm{e}^{-x}\cos x\qquad \text{h) } \log\left(x^2+\tfrac{1}{x}\right)$$

33. Discutir según los valores a las diferentes formas que puede tener la gráfica de:

$$\text{a) } 1+ax^2+x^4\quad ;\quad \text{b) } \frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}\quad ;\quad \text{c) } x^a\operatorname{sen}\frac{1}{x}\ .$$

34. Discutir, según los valores de la constante a, cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\mathrm{e}^x=ax$.

35. Una farola, que tiene su luz a $3\,\mathrm{m}$ de su base, ilumina a un peatón de $1.75\,\mathrm{m}$ que se aleja a una velocidad constante de $1\,\mathrm{m/s}$. ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece dicha sombra?

36. Hallar dos números x, y tales que $|x| + |y| = 1$ y tales que la suma de sus cuadrados sea i) máxima, ii) mínima.

37. Determinar el triángulo de área mínima de entre todos aquellos del primer cuadrante cuyos catetos son los ejes y cuya hipotenusa pasa por el punto $(1, 2)$. ¿Existe el de área máxima?

38. Hallar el punto de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(1, -\sqrt{3}\,)$ que esté más próximo al punto $(2, 0)$.

39. Encontrar el punto de la gráfica de $f(x) = 2\arctan(x-2)$ para el que es mínima la suma de sus distancias a ambos ejes.

40. Determinar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x, y positivos y el vértice opuesto sobre la gráfica de $f(x) = \left[x^3 + 4\right]^{-1/2}$.

41. Hallar el punto P sobre la gráfica de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ en el primer cuadrante para el que es máxima el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a dicha gráfica en P y cuyos catetos están sobre los ejes coordenados.

42. Determinar los puntos de la parte de la gráfica de $g(x) = 1 - (x - 2)^3$ contenida en $x, y \geq 0$, para los que la recta tangente en ellos corta el eje y en el punto i) más alto, ii) más bajo.

43. Un nadador está en el punto A del borde de un estanque circular de $50\,\mathrm{m}$ de radio y desea ir al punto diametralmente opuesto B , nadando hasta algún punto P del borde y andando luego por el arco PB del borde. Si nada $50\,\mathrm{m}$ por minuto y camina $100\,\mathrm{m}$ por minuto ¿A qué punto P se debe dirigir para minimizar el tiempo de su recorrido?

Grupos A, B, C y D de CÁLCULO I (curso 2004/2005). Problemas 44-69.

44. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_{n+1} = \frac{n+2}{3n+1} a_n$, con $a_1 = 1$. Probar que tiene límite y calcularlo. Determinar la convergencia de $\sum a_n$.

45. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

a) $\sum \frac{2^{n^2}}{n^n}$ b) $\sum \frac{3+\cos n}{\sqrt{n}}$ c) $\sum (-1)^n \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$ d) $\sum \left[\frac{e^{-100}}{n} - \frac{e^{-n}}{100}\right]$

e) $\sum n e^{-n^2}$ f) $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ g) $\sum \frac{3n+1}{n(2n-1)}$ h) $\sum (-1)^n \frac{n+24}{25n}$

i) $\sum \frac{n^n}{(n+2)^n}$ j) $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ k) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ l) $\sum (-1)^n \frac{4n-1}{2n(n-1)}$

m) $\sum \frac{2+(-1)^n}{n^2+3}$ n) $\sum \frac{n}{(-3)^n}$ ñ) $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$ o) $\sum \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$

46. Probar que la suma de las siguientes series es la indicada:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3^{n-2}} = \frac{99}{4} \ ; \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1} = 3 \ ; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]} = 1 \ .$$

47. Determinar para que números reales c convergen las siguientes series:

$$\text{a) } \sum \frac{(-1)^n}{n^c} \ ; \quad \text{b) } \sum \frac{c^n+2}{e^n+n} \ ; \quad \text{c) } \sum \frac{(n!)^c}{(3n)!} \ ; \quad \text{d) } \sum \frac{(c-1)^n}{2^{2n-1}} \ ; \quad \text{e) } \sum \frac{(2c-1)^{n^2}}{n+1} \ .$$

48. Determinar para qué $a \in \mathbf{R}$ converge $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{a^n}$. Precisar para qué valores de a su suma es $\frac{1}{3}$.

49. Precisar los x para los que converge $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ y hallar su suma. Para i) $x = \frac{1}{4}$, ii) $x = -\frac{1}{4}$, ¿cuántos términos hay que sumar para aproximar el valor exacto con error menor que 10^{-3}?

50. Estudiar si convergen puntual y uniformemente en el intervalo que se indica:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}} \text{ en } [0,2] \ ; \quad g_n(x) = e^{x-n} \text{ en i) } (-\infty, 0] \text{ , ii) } [0, \infty) \ .$$

51. Estudiar la convergencia uniforme en $[0,1]$ de las siguientes $f_n(x)$:

$$\text{a) } x^{1/n} \ ; \quad \text{b) } \frac{nx}{n+1} \ ; \quad \text{c) } \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \ ; \quad \text{d) } nx^2 e^{-nx^2} \ .$$

52. Estudiar para qué x convergen, y si lo hacen uniformemente en el intervalo que se indica:

a) $\sum \frac{x}{n+1}$ en $[0,1]$ b) $\sum e^{-nx^2} \operatorname{sen} nx$ en $[1,\infty)$ c) $\sum \frac{\cos^n x}{n^3}$ en $\mathbf{R}$

d) $\sum \frac{x}{\sqrt{n^3+x}}$ en $[0,1]$ e) $\sum \frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}$ en $[1,2]$ f) $\sum \frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n}$ en $[5,6]$

53. Determinar todos los valores de x para los que convergen las series:

a) $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ b) $\sum \frac{x^n}{n^n}$ c) $\sum \cos \frac{n\pi}{6} x^n$ d) $\sum 2^{n^2} (x-2)^n$

e) $\sum \frac{2^n x^n}{n!}$ f) $\sum \frac{n^2 x^{2n}}{\pi^n}$ g) $\sum e^{-\sqrt{n}} x^n$ h) $\sum \frac{(7x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

54. Determinar para qué valores de x converge $\sum_{n=1}^{\infty} n 3^n x^{n-1}$ y hallar su suma para esos valores.

55. Hallar los x para los que converge $\sum (-2x)^{3n}$. Decidir si converge para $x = \arctan \frac{3}{5}$.

56. Hallar todos los valores de x para los cuales la serie $\sum \left[1 - x \cos \frac{1}{n}\right]$ es convergente.

57. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de:

a) $\cos 1$, b) $\operatorname{sen} 3$, c) e , d) e^{-2} , e) $\log \frac{3}{2}$, f) $\log \frac{4}{3}$, g) $\log 2$, h) $\log \frac{1}{2}$, i) $\operatorname{sh}(-1)$, j) $\operatorname{ch} \frac{1}{2}$

58. Sea $f(x)=x(1+x^3)^{-1/5}$. Hallar los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$. Aproximar por un racional $f(1/2)$ con error menor que 0.001 .

59. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor en $x=0$ de:

a) $\cos^2 \frac{x}{3}$ b) $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ c) $\operatorname{sen} x - x\cos x$ d) $(2-x)\sqrt{1+x}$

e) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ f) $\frac{1}{\cos x}$ g) $\frac{\log(1+2x)}{1+2x}$ h) $\cos(\operatorname{sen} x)$

60. Hallar la suma de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \;;\quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} \;;\quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)} \;;\quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!\,2^n} \;;\quad \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \,.$$

61. Hallar un polinomio P tal que $\lim\limits_{x\to 0} x^{-7}\left[\sqrt{1-x^4}-P(x)\right]=0$. ¿Es único dicho polinomio?

62. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:

$a=0$: a) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$; b) $\frac{x-\tan x}{\arctan(x^3)}$; c) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$; d) $(\cos 2x)^{3/x^2}$; e) $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

$a=1$: f) $\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}$; g) $\frac{x^x-x}{1-x+\log x}$; h) $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. $a=0^+$: i) $\tan x \log x$.

$a=\infty$: j) $[\log x]^{1/x}$; k) $\frac{\mathrm{e}^x+\operatorname{sen} x}{\mathrm{e}^x+\cos x}$; l) $\left[\frac{x+3}{x-3}\right]^x$; m) $x^2\arctan\frac{1}{x}-\sqrt{1+x}$; n) $x\tan\frac{1}{x}$.

63. Determinar un valor de b tal que $f(x)=x^{-2}\left[\mathrm{e}^{bx^4}-\cos bx\right]$ tienda hacia 0 si $x\to\infty$ y tienda hacia 2 si $x\to 0$.

64. Sean a) $f(x)=\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1-\mathrm{e}^{-x^3}}$, b) $g(x)=\frac{\arctan(\operatorname{sen} x)-x}{\log(1+x^3)}$.
Determinar (si existen) sus límites cuando: i) $x\to 0$; ii) $x\to -\infty$; iii) $x\to\infty$.

65. Estudiar en qué puntos es continua la función: $f(x)=\frac{x^2\operatorname{sen}\pi x}{1-\cos\pi x}$ si $x\notin \mathbf{Z}$, $f(x)=0$ si $x\in\mathbf{Z}$.

66. Sea $f(x)=\frac{\log|1+x^3|}{x}$, $f(0)=0$.
Estudiar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$. Dibujar su gráfica. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(f(n))\}$.

67. Sea $f(x)=x^{-2}\operatorname{sen}^2\pi x$, $f(0)=\pi^2$. Determinar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$. Dibujar su gráfica. Probar que existe la inversa f^{-1} en un entorno de $x=\frac{1}{2}$ y calcular la derivada de f^{-1} en $f(\frac{1}{2})$.

68. Estudiar la continuidad de $f(x)=(1-\frac{1}{x})\log|1-x^2|$, $f(\pm 1)=f(0)=0$. ¿Existe $f'(0)$?
Probar que $\exists c\in(0,1)$ con $f'(c)=0$.

69. Sea $f(x)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$, $f(0)=1$. Hallar $f'(0)$. Determinar los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ y la im f . Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f . Hallar la derivada $f^{(2003)}(0)$.

Grupos A, B, C y D de CÁLCULO I (curso 2004/2005). Problemas 70-100.

70. Sea $f(x)=\log(2-x)$, $x\in[0,1)$; $f(x)=0$, $x\in[1,2)$; $f(x)=1$, $x\in[2,3]$, y sea $F(x)=\int_0^x f$. Determinar los $x\in[0,3]$ para los que F es continua y derivable. Hallar $F(3)$.

71. Derivar las siguientes funciones:

a) $F(x)=\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\,dt$; b) $G(x)=\int_1^x x\operatorname{sen} t^3\,dt$; c) $H(x)=\operatorname{sen}\big(\int_0^x \operatorname{sen}\big(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\,dt\big)\,dy\big)$.

72. Calcular el límite cuando x tiende a 0 y a ∞ de: a) $\dfrac{x\int_0^x e^{-t^2}dt-\arctan x^2}{\log[1+x^4]}$; b) $\dfrac{\int_{-x^2}^0 \operatorname{sen} t^2 dt}{x^6}$.

73. Sea $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^3)+1}{\int_{-1}^x \operatorname{sen}(t^3)dt+x+4}$. Calcular, si existe, $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

74. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a) $F(x)=\int_0^{x-x^3}\frac{dt}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 t}}$ en $[0,2]$; b) $G(x)=\int_\pi^x \operatorname{sen}^2 t dt$ en $[0,4\pi]$;

c) $H(x)=\int_x^{x+1}\frac{t\,dt}{t^2+2}$ en $\mathbf{R}$; d) $K(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{36+t^3}}$ en $[-1,6]$.

75. Estudiar en qué intervalos crece y decrece la función $f(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}dt-e^{x^4}$. Determinar en cuántos puntos del intervalo $[0,\infty)$ se anula $f(x)$.

76. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x\geq 2$ por $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\log t}$?

77. Sea $f(x)=\int_1^x e^{4\arctan t}\,dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$. Probar que f posee inversa en todo $\mathbf{R}$ y calcular $(f^{-1})'(0)$.

78. Sea $F(x)=\int_{-1/x}^{1/x^2} e^{-t^4}dt$. Hallar $F'(1)$. Estudiar si la serie $\sum(-1)^n F(n)$ converge.

79. Sea $f(x)=x^2e^{-x^2}$. Si $H(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$, hallar el x para el que $H(x)$ es máximo. Dibujar aproximadamente la gráfica de f y probar que el valor máximo de H es menor que $1/2$.

80. Hallar los valores máximo y mínimo de $g(x)=\frac{x^2-5x}{x-9}$ en $[2,4]$. Probar que $\frac{8}{5}<\int_2^4 g(x)dx<2$. Hallar la integral y, usando desarrollos de Taylor, comprobar las desigualdades anteriores.

81. Hallar las siguientes primitivas:

a) $\int\frac{[\log x]^2}{x}\,dx$ b) $\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$ c) $\int x^2\arctan\frac{1}{x}dx$ d) $\int(\log x)^3dx$ e) $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

f) $\int\frac{x^4}{x+1}\,dx$ g) $\int\frac{dx}{x^4-2x^3}$ h) $\int\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx$ i) $\int 4x\cos x^2dx$ j) $\int 4x\cos^2 x\,dx$

k) $\int\cos^5 x\operatorname{sen}^2 x\,dx$ l) $\int\frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{3+4\cos x}$ m) $\int\frac{dx}{3\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}$ n) $\int\tan^2 x\,dx$ ñ) $\int\cos(\log x)dx$

o) $\int\sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}}dx$ p) $\int x^3e^{x^2}dx$ q) $\int\frac{dx}{1+2e^x+e^{2x}}$ r) $\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ s) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

t) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ u) $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ v) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$ w) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$ x) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

82. Calcular, si existe:

a) $\int_{-1}^1 e^{-|x|}dx$ b) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^4+x^2}$ c) $\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+x-2}$ d) $\int_0^{\log 2} e^x\log(e^x+1)dx$

e) $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx$ f) $\int_0^1\arctan(\sqrt{x})dx$ g) $\int_1^3 x\sqrt{1+x}\,dx$ h) $\int_{-2}^4(|x+4|-3|x|)dx$

i) $\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}$ j) $\int_0^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ k) $\int_4^5\frac{dx}{x-4\sqrt{x-4}}$ l) $\int_{-\pi/6}^0\frac{\cos x\,dx}{3\operatorname{sen}x-2\cos^2x}$

83. Sea $f(x)=x\log(1+\frac{4}{x^2})$. Hallar una primitiva de f . Estudiar la convergencia de $\int_1^\infty f$.

84. Probar que $\int_3^\infty x^{-3}\mathrm{e}^{-6/x}dx$ es convergente y que su valor es menor que $\frac{1}{18}$.

85. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Hallar su valor si se puede:

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2}$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ c) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{x+1/x}}$

e) $\int_1^\infty[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}]\,dx$ f) $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-1/x}\,dx$ g) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ h) $\int_1^\infty[\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}]\,dx$

i) $\int_1^\infty \frac{x+2\mathrm{e}^{\cos x}}{x^3-2\sqrt{2}}\,dx$ j) $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ k) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx$ l) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$

m) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^2}\,dx$ n) $\int_1^\infty(1-\cos\frac{2}{x})\,dx$ ñ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\mathrm{sen}^2 x}\,dx$ o) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}dx}{(x-1)^{1/3}}$

p) $\int_0^1 \log x\,dx$ q) $\int_1^\infty \log x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2}\,dx$ r) $\int_4^\infty \frac{\arctan(1/x)}{(2x-8)^{1/3}}\,dx$ s) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^4 x}{\mathrm{e}^{x^4}-1}$

86. Discutir según los valores de $n\in\mathbf{N}$ la convergencia de: a) $\int_0^1[\frac{n}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]\,dx$; b) $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{x^n-8}$.

87. Discutir según los valores de $a\in\mathbf{R}$ la convergencia de las integrales:

$$\text{i) } \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x^a}\,dx\ ;\quad \text{ii) } \int_0^\infty \frac{\arctan(x+\frac{1}{x})}{(1+x^2)^a}\,dx\ ;\quad \text{iii) } \int_0^\infty [x^3+\mathrm{sen}\,x]^a\,dx\ .$$

88. Dada $F(x)=\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{\log t+t}}$. Determinar si existe $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(2x)}{F(x)}$ (si existe).

89. Sea $H(x)=|x-1|\int_{-1}^x \mathrm{sen}\,t^3\,dt$. Aproximar por un racional $H(0)$ con error menor que 10^{-3}. Hallar, si existe, $H'(1)$.

90. Sea $g(x)=\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}$. Hallar la primitiva $G(x)$ que cumple $G(0)=-1$. Probar que $g(x)>1$ si $x\in[0,1]$ y que hay un único $c\in(0,1)$ tal que $G(c)=0$. Determinar si converge $\int_{2^+}^3 \sqrt{g(x)}dx$.

91. Hallar, justificando los pasos, el valor de:

$$\text{i) } \int_0^{1/2}\Big(\sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n\Big)\,dx\ ,\quad \text{ii) } \int_0^\pi\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2}\Big)\,dx\ ,\quad \text{iii) } \int_0^1\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{[n+x]^4}\Big)\,dx\ .$$

92. Calcular el área encerrada entre las gráficas de $g(x)=x^3-3x^2+3x$ y $f(x)=x$ en $[0,2]$.

93. Calcular el área de la región acotada entre las curvas $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$ e $y=0$.

94. Hallar el área de una de las regiones iguales encerradas entre las gráficas de $|\,\mathrm{sen}\,x|$ y $|\cos x|$.

95. Hallar el área de la menor de las dos regiones acotadas por las curvas $x^2+y^2=2$ y $x=y^2$.

96. Calcular el área de una de las regiones comprendidas entre la gráfica de $f(x)=\mathrm{sen}\,x$ y esta misma gráfica trasladada horizontalmente una distancia $\frac{\pi}{3}$ hacia la derecha.

97. ¿Cuál de todas las rectas que pasan por $(1,2)$ determina con $y=x^2$ la región de mínima área?

98. Sea la región del cuarto cuadrante limitada por la gráfica de $f(x)=-\mathrm{e}^{-ax}$ ($a>0$) y el eje x . Probar que la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$ divide dicha región en dos partes de igual área.

99. Hallar el área de la región encerrada entre la cardioide $r=1+\cos\theta$ y la circunferencia $r=\cos\theta$.

100. Hallar el área determinada por la curva $r=1/(1+\cos\theta)$ y las semirrectas $\theta=0$ y $\theta=3\pi/4$, i) trabajando en polares, ii) tras escribir la ecuación de la curva en rectangulares.