Soluciones a los problemas 1-18 de los grupos A,B,C,D de Cálculo I (2004-2005).

1. a) $x(x-1)(x+2)>0$. $A=(-2,0)\cup(1,\infty)$.

b) $x\le 4/7 \Rightarrow x(x-7)=0 \Rightarrow x=0$; $x>4/7 \Rightarrow (x-1)(x+8)=0 \Rightarrow x=1$. $A=\{0,1\}$.

c) $|x(x-2)|<1 \Rightarrow -1<x(x-2)<1 \Rightarrow x^2-2x-1<0,\ x^2-2x+1>0$. $A=(1-\sqrt{2},1)\cup(1,1+\sqrt{2})$.

d) Si $x\ge 2$, numerador y denominador son ≥ 0 , si $x<-2$ son negativos. $A=(-\infty,-2)\cup[2,\infty)$.

e) $-2\le 1-\frac{1}{x}\le 2 \Rightarrow \frac{1}{x}\ge -1$ y $\frac{1}{x}\le 3 \Rightarrow (x>0$ ó $x\le -1)$ y $(x\ge \frac{1}{3}$ ó $x<0)$. $A=(-\infty,-1]\cup[\frac{1}{3},\infty)$.

f) $x<0 \Rightarrow -2x+3\le 5 \Rightarrow x\ge -1$; $0\le x\le 3 \Rightarrow x-x+3\le 5$; $x\ge 3 \Rightarrow 2x-3\le 5 \Rightarrow x\le 4$. $A=[-1,4]$.

g) $4\pi^2\le x^2-5\pi^2$ ó $x^2-5\pi^2\le -4\pi^2 \Rightarrow 9\pi^2\le x^2$ ó $x^2\le \pi^2$. $A=(-\infty,-3\pi]\cup[-\pi,\pi]\cup[3\pi,\infty)$.

h) $-x<x+1<x \Rightarrow A=\emptyset$.

2. a) $(-\infty,-2)\cup(2,7)\cup(7,\infty)$. No tiene ínfimo ni supremo. Es abierto. No es cerrado

b) Ínfimo $=-2$ (mínimo). Supremo $=2$ (máximo). No es abierto. No es cerrado.

c) Ínfimo $=-1$ (no es mínimo). Supremo $=\frac{3}{2}$ (máximo). No es abierto. No es cerrado.

d) Ínfimo $=0$ (no es mínimo). Supremo $=1$ (no es máximo). Es abierto. No es cerrado.

e) Ínfimo $=10^{-7}$ (sin considerar $n=0$) (mínimo). No tiene supremo. No es abierto. Es cerrado.

f) No tiene ínfimo ni supremo. Está acotado. Es abierto. Es cerrado.

3. $((h\circ f)g)(x)=\frac{2\sqrt{x+2}}{x^2-x-2}$, $D=[-2,-1)\cup(-1,2)\cup(2,\infty)$

$(h\circ f\circ g)(x)=\frac{2}{x-\sqrt{x+2}}$, $D=[-2,2)\cup(2,\infty)$

$(g\circ f+g\circ h)(x)=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{\frac{2}{x}+2}$, $D=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$(g\circ(f+h))(x)=\sqrt{\frac{2}{x}+x^2-x}$, $D=(-\infty,-1]\cup(0,\infty)$

$\operatorname{im} f=[-\frac{9}{4},\infty)$, $\operatorname{im} g=[0,\infty)$, $\operatorname{im} h=\mathbf{R}-\{0\}$

$g^{-1}(x)=x^2-2, \quad \forall x\in[0,\infty)$

4. a) $\operatorname{sen} 3x=3\operatorname{sen} x-4\operatorname{sen}^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

b) $\cos 3\alpha=\frac{44}{125}$. 3α está en el cuarto cuadrante.

5. $\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-5\cos x-2=2\cos^2 x-5\cos x-3=0 \ \rightarrow\ \cos x=-\frac{1}{2}$ (= 3 imposible) $\rightarrow\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

b) $\log x^3=\log(3x+2)$, $x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2=0 \ \rightarrow\ x=2$ ($x=-1$ no lo cumple).

c) Si $x\ge 1$, $\mathrm{e}^{2|\log x|}=x^2<8x \ \rightarrow\ x<8$; si $0<x\le 1$, $\mathrm{e}^{2|\log x|}=x^{-2}<8x \ \rightarrow\ x>\frac{1}{2}$. $x\in(\frac{1}{2},8)$.

d) $|\tan x|<1 \Leftrightarrow x\in\cdots\cup(-\frac{5\pi}{4},-\frac{3\pi}{4})\cup(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\cup(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})\cup(\frac{7\pi}{4},\frac{9\pi}{4})\cup\cdots$.

6. a) $\frac{(-1)^n+n}{1+n}\to 1$. $a_{2m}=1$, $a_{2m+1}=\frac{m}{m+1}$. $|\frac{m}{m+1}-1|<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Si $\varepsilon=1 \Rightarrow n=2$, $\varepsilon=0.1 \Rightarrow m=9 \Rightarrow n=20$, $\varepsilon=0.01 \Rightarrow m=99 \Rightarrow n=200$.

b) $10^{7-n}\to 0$. $|10^{7-n}|<\varepsilon$. Si $\varepsilon=1 \Rightarrow n=8$, $\varepsilon=0.1 \Rightarrow n=9$, $\varepsilon=0.01 \Rightarrow n=10$.

c) $\frac{300\cos n-2n}{n^2}\to 0$. $|\frac{300\cos n-2n}{n^2}|<\frac{300+2n}{n^2}<\varepsilon$. De aquí:

$n^2\varepsilon-2n-300>0 \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}(1+\sqrt{1+300\varepsilon})$. Si $\varepsilon=1,\ 0.1,\ 0.01 \Rightarrow n=19,66,301$.

(Con calculadora se comprueba que bastan: $\varepsilon=1 \Rightarrow n=17$, $\varepsilon=0.1 \Rightarrow n=61$, $\varepsilon=0.01 \Rightarrow n=293$).

7. a) $n = 2k \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{n^2\pi}{4} - \frac{7}{n} = \operatorname{sen} k^2\pi - \frac{7}{n} = -\frac{7}{n} \to 0.$

b) $n = 2k+1 \Rightarrow 2^{(-2)^n} = 2^{(-2)^{2k+1}} = \left(2^{2^{2k+1}}\right)^{-1} \to 0.$

c) No (ninguna subsucesión está acotada).

8. a) $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$. La implicación inversa es falsa ($a_n = (-1)^n$ diverge, pero $|a_n|$ converge).

b) $|a_n^2 - a^2| = |a_n + a|\,|a_n - a| \leq (K + |a|)|a_n - a|$ con $|a_n| < K$. La implicación inversa no es cierta.

c) $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}|a_n - a| \leq \frac{1}{\sqrt{a}}|a_n - a|$.

d) $\forall K > 0\ \exists N$ tal que $a_n > K^2$, $\forall n > N \Rightarrow \sqrt{a_n} > K$.

9. a) $\frac{n^2-30n}{3-100n}$ diverge a $-\infty$; b) $\frac{17\sqrt{n+3}+9}{\sqrt{n^2+1}-1} \to 0$;

c) $(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - 1\right) \to 0$; d) $\left(\sqrt{2n^2-1} - 1\right)^4$ diverge a ∞ ;

e) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$ diverge a ∞ ; f) $\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2-1}{2n} \to \frac{1}{4}$;

g) $(-1)^n\sqrt{n} - n$ diverge a $-\infty$; h) $\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}} \to \frac{1}{2}$;

i) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \to \mathrm{e}^2$; j) $\frac{n!}{n^n} \to 0$;

k) $n\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}} - \sqrt{2}\right) \to \frac{1}{2\sqrt{2}}$; l) $1 + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \to 2$.

10. a) $\sqrt{n^2+an} - bn = \frac{(1-b)n^2-an}{\sqrt{n^2+an}+bn}$. Si $b \neq 1$ diverge. Si $b = 1$ converge a $\frac{a}{2}$.

b) $a = 1 \Rightarrow \left(a + \frac{b}{n}\right)^n \to e^b$. Si $a > 1$ diverge. Si $a < 1$ el límite es 0.

c) $(a^n + b^n)^{1/n} \to \text{máx}(a, b)$.

11. $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n$.

$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2}+1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{3+\sqrt{2}} < 1+\sqrt{2}$.

$a_n \to a, a_{n-1} \to a \Rightarrow a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a = 2$.

12. a) $f(x) = 1 + \sqrt{4+x}$ continua en $x = 0$: $\left|\sqrt{4+x} - 2\right| = \dfrac{|x|}{\sqrt{4+x}+2} \leq \dfrac{|x|}{2} \Rightarrow \delta = 2\varepsilon$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$, tal que, si $x > K$, entonces $|\frac{1}{1+x^2}| < \frac{1}{x^2} < \varepsilon$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+x}{x^3} = \infty$: $\forall K > 0$, $\exists\delta > 0$, tal que, si $0 < x < \delta$, entonces $\frac{1+x}{x^3} > K$. Basta tomar $\delta = \frac{1}{K^{1/3}}$.

13. f, g pares $\Rightarrow f+g$, fg, $f\circ g$ pares. f, g impares $\Rightarrow f+g$, $f\circ g$ impares, fg par.

f par, g impar $\Rightarrow f+g$ no es par ni impar, fg impar, $f\circ g$, $g\circ f$ pares.

Si f es impar, $\lim\limits_{x\to 0} = b$ y $\{a_n\} \to 0$ es $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b = \lim\limits_{n\to\infty} f(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = -b \Rightarrow b = 0$.

14. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \\ -1 \text{ si } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ discontinua en todo $\mathbf{R}$. Pero $|f(x)| = 1$ continua en todo $\mathbf{R}$.

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x \neq 0$ y discontinua en 0.

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ es continua en $x = 0$ y discontinua en $\mathbf{R} - \{0\}$.

15. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{-x} = -1$. No existe limite.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \lim\limits_{x\to 0} x = 1\cdot 0 = 0$. c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$. e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log \frac{1}{x} = \infty$. No definido si $x < 0$.

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ no existe. $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$. No existe limite.

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$. h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-8}{x-2} = 7$. i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x^4+x^3+x^2+x+1) = 5$.

j) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\operatorname{sen} x} = 0$. No definido si $x > 1$. k) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{(x-1)^2} \frac{x-1}{x+1} = 1\cdot 0 = 0$.

l) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = \frac{\pi}{2}$. $\operatorname{arc\,sen} x$ no está definido si $x > 1$.

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{3+2^{1/x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{3+2^{1/x}} = \frac{1}{3}$. No existe limite. n,ñ) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{3+2^{1/x}} = \frac{1}{4}$.

o) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2-x} - x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = -\frac{1}{2}$. p) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-x} - x) = \infty$.

q) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x+1)^{100}}{(2x+5)^{100}} = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+5}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}}$. r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+\operatorname{sen}^3 x}{5x+6} = \frac{1}{5}$.

s) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+5} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+x^{-2}}}{x+5} = -1$. t) No existe límite.

16. Usando el teorema de Bolzano, por ejemplo en $[0,2]$ y en $[2,32]$.

17. Si fuese $f(0) = 0$ ó $f(1) = 1$, serían puntos fijos. Sea $f(0) > 0, f(1) < 1$. Entonces el teorema de Bolzano aplicado a $g(x) = f(x) - x$ asegura que hay $x \in (0,1)$ con $g(x) = 0$.

18. $\lim_{x\to\infty} = b \Rightarrow \exists K$ tal que $|f(x) - b| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |b|$ si $x \geq K \Rightarrow f$ está acotada en $[K, \infty)$. Y en $[a, K]$ lo está por ser continua.
No tiene que alcanzar su valor máximo (por ejemplo, $f(x) = -e^{-x}$ no lo hace).

Soluciones a los problemas 19-43 de los grupos A,B,C,D de Cálculo I (2004-2005).

19. a) $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$, $f'(0) = 0$. $f''(x) = 6x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 4\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, en $\mathbf{R} - \{0\}$.

b) $g'(x) = 1 + \log|x|$, en $\mathbf{R} - \{0\}$. $g''(x) = \frac{1}{x}$, en $\mathbf{R} - \{0\}$.

c) $h'(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4x}$, en $(0,\infty)$. $h''(x) = -\frac{6x-4\sqrt{x}+1}{4x\sqrt{x}(2x+1-2\sqrt{x})^2}$, en $(0,\infty)$.

d) $k'(x) = \begin{cases} \frac{7}{3}x^{4/3} - 2x & \text{si } x > 1 \\ 2x - \frac{7}{3}x^{4/3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$. $k''(x) = \begin{cases} \frac{28}{9}x^{1/3} - 2 & \text{si } x > 1 \\ 2 - \frac{28}{9}x^{1/3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

e) $l'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$, en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. $l''(x) = \frac{2+2x^2-8x^4}{(1-x^2)^2(1-2x^2)^{3/2}}$, en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

f) $m'(x) = (5x^2+2x+1)(3x+1)^{-4/3}$ en $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{3}\}$. $m''(x) = (5x^2+4x-1)(3x+1)^{-7/3}$ en $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{3}\}$.

20. Por continuidad: $a + b = 1$. Por derivabilidad: $-1 = 2b$. $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

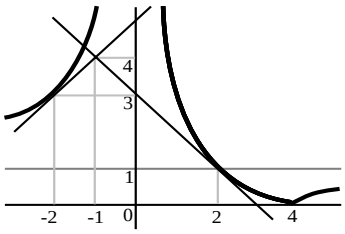
21. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $y = e^{a^2-a}\left[(2a-1)(x-a)+1\right]$, que pasa por el origen si: $2a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, 1$. Por tanto, los puntos pedidos son: $\left(-\frac{1}{2}, e^{3/4}\right)$ y $(1,1)$.

22. Buscamos $x \in (0,1)$ con $f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{\pi}{4}$ (pendiente de la recta). $x = 1 - \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$ lo cumple.

23. $g(x) = \begin{cases} -1 + 4/x, & x \in (0,4] \\ 1 - 4/x, & x \in (-\infty,0) \cup [4,\infty) \end{cases}$

$g'(x) = \begin{cases} -4/x^2, & x \in (0,4) \\ 4/x^2, & x \in (-\infty,0) \cup (4,\infty) \end{cases}$

Rectas tangentes: $y = x + 5$, $y = -x + 3$. Corte: $(-1,4)$.



24. Derivando implícitamente: $y'(x) = -\frac{2xy}{1+x^2+3y^2}$. La recta tangente es: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$.

25. $f'(0^+) = 2$, $f'(0^-) = 0$. No es derivable. $f'(x) \neq 0$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}] - \{0\}$.

f decrece en $(-\frac{1}{2}, 0)$ y crece en $(0, \frac{1}{4})$: $x = 0$ es el mínimo. $f(-\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{4})$. Máximo en $x = \frac{1}{4}$.

26. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. $f(1) = \frac{\pi}{2}$, $f(-1) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\log 3$. Máximo en 1 y mínimo en -1.

27. $f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x \to$ en $x = \frac{\pi}{6}$ valor máximo. El valor mínimo será $f(1) = 1 + 2\cos 1 < f(0) = 2$, pues $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (o porque $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \cdots > \frac{1}{2}$, serie de Leibniz).

$f'(x) \geq 1 - 2\operatorname{sen}\frac{1}{2} > 0$ si $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow$ existe f^{-1}; como $f^{-1}(2) = 0$ (es $f(0) = 2$): $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 1$.

28. a) $f(-8) = -52$, $f(64) = -16$, $f(0) = 0$, $f'(27) = 0, f(27) = -27$. Mínimo en -8 y máximo en 0.

b) $g(0) = 2$, $g(\pi) = \pi + 2$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. $g'(\frac{\pi}{6}) = 0, g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt(3)$. Mínimo en $\frac{\pi}{2}$ y máximo en π.

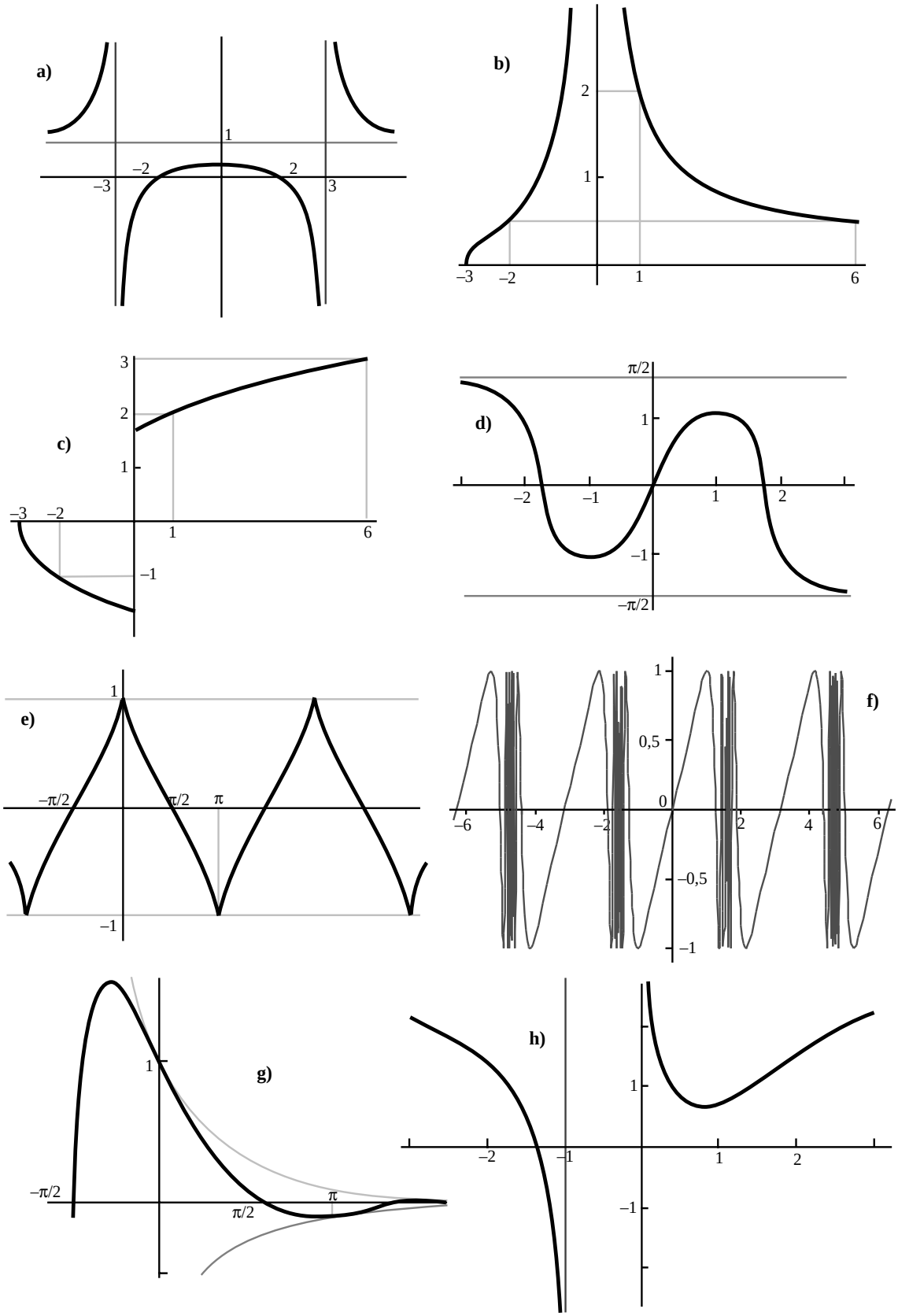
c) $h'(4) = 0$. Mínimo en 4. El valor máximo no existe.

29. $\lim_{x\to\pm\infty} = \infty$, $f(0) = -1$. Si $x < 0$ es $f' < 0$ y si $x > 0$ es $f' > 0$. Tiene solo dos ceros en $\pm x_0$.

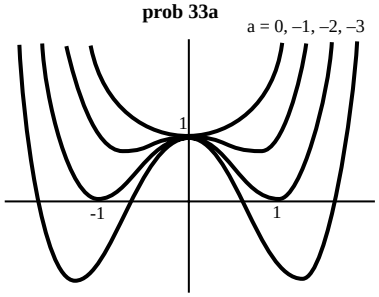
30. $f'(x) = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow f$ decrece en $(-1,0]$ y crece en $[0,1)$. $f(\frac{3}{5}) = \frac{9}{20} < \frac{2}{3} < f(\frac{4}{5}) = \frac{16}{15}$ y f continua en $[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \Rightarrow \exists c \in (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ con $f(c) = \frac{2}{3}$. Al ser f creciente en el intervalo, el c es único.

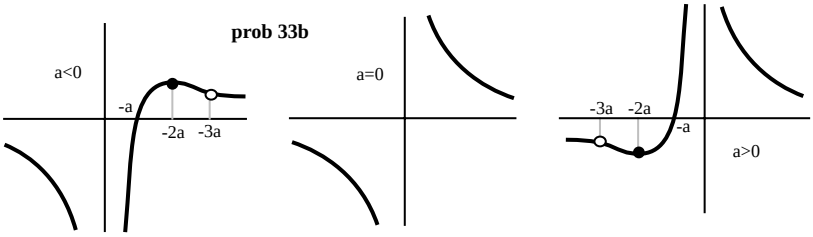
31. $P(x) = x^3 + x^2 - 8x + 7$. En $(-2, \frac{4}{3})$ decrece y crece en el resto de $\mathbf{R} \Rightarrow$ tiene un mínimo en $x = \frac{4}{3}$. Como $P(\frac{4}{3}) > 0$, no tiene raíces positivas. Y como $P \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ tiene una negativa. [El criterio de signos aseguraba una única raíz negativa y cero o dos positivas].

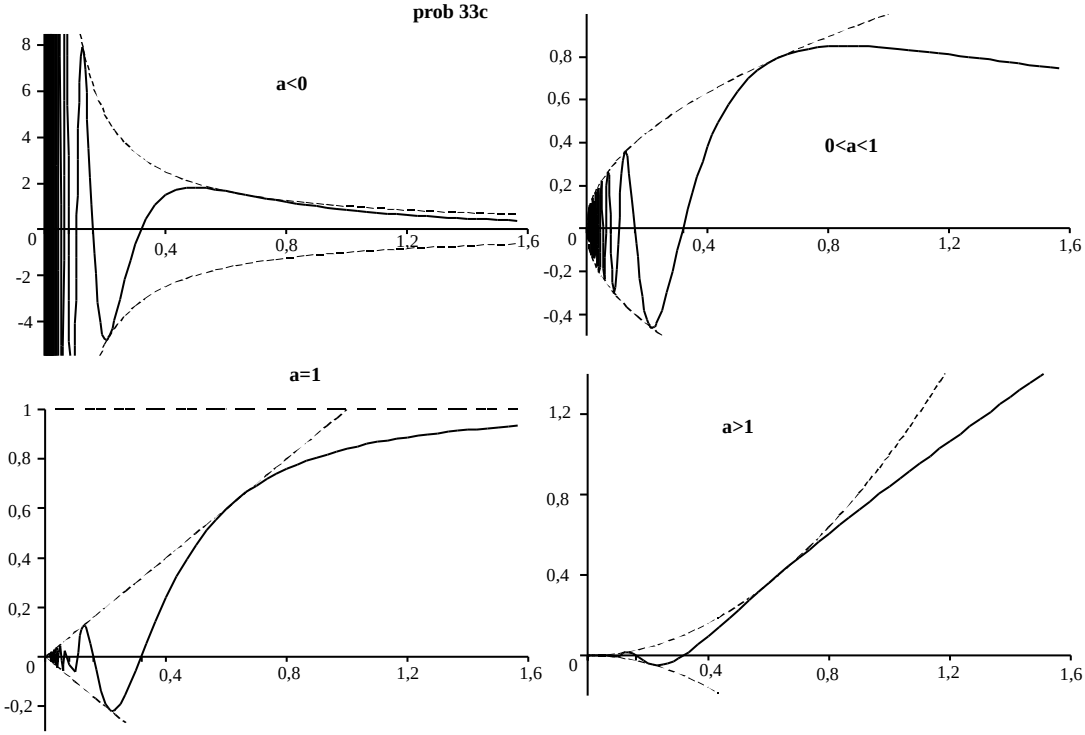
32.


a)
1
–2
2
–3
3
b)
2
1
–3
–2
1
6
c)
3
2
1
–3
–2
1
6
–1
d)
π/2
1
–2
–1
1
2
–1
–π/2
e)
1
–π/2
π/2
π
–1
f)
1
0,5
0
–6
–4
–2
2
4
6
–0,5
–1
g)
1
–π/2
π/2
π
h)
1
–2
–1
1
2
–1

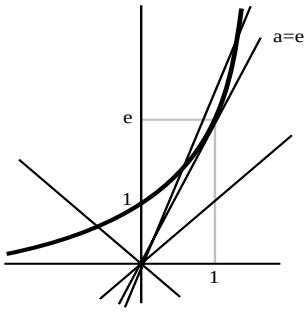
33.







34. Si $a < 0$, una raíz.
Si $0 \leq a < e$, ninguna.
Si $a = e$, una.
Si $a > e$, dos.



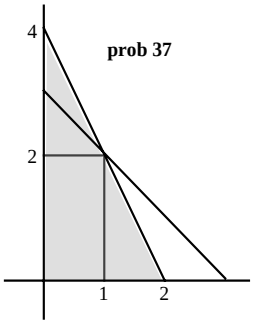
35. Velocidad del extremos de la sombra $=\frac{12}{5}$. Velocidad de crecimiento $=\frac{7}{5}$.

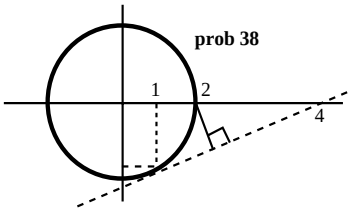
36. Mínimos en $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$. Máximos en $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

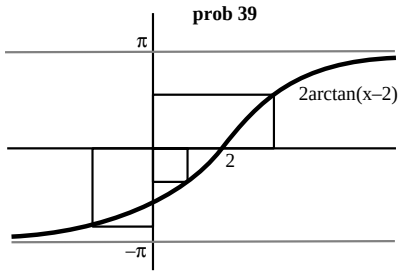
37. Rectas por $(1,2)$: $y = 2 + m(x-1)$. Hay que minimizar $A(m) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{m})(2-m)$, con $m \in (-\infty, 0)$. Área mínima si $m = -2$ $(x = 2,\ y = 4)$. No existe el de área máxima.

38. Recta tangente $y = \frac{x-4}{\sqrt{3}}$. Distancia al cuadrado $D(x) = (x-2)^2 + (\frac{x-4}{\sqrt{3}})^2$ mínima si $x = \frac{5}{2} \to y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. [O bien, el punto más próximo pertenece también a la perpendicular que pasa por $(0,2)$: $y = -\sqrt{3}(x-2)$].

39. $D(x) = |x| + |2\arctan(x-2)|$. $D'(x) = 0$ si $x = 1$. $D(1) > D(0) > D(2)$. Punto más cercano: $(2,0)$.







40. Área del rectángulo: $A(x) = xf(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+4}}$. $A'(x) = \frac{8-x^3}{2(x^3+4)^{3/2}} \Rightarrow x = 2$ máximo local. $A_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

41. Área del triángulo limitado por la tangente en $x = a$: $A(a) = \frac{1}{2}e^{-a}(1+a)^2$. Es máxima si $a = 1$.

42. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9$. Punto de corte más bajo en $y = 1$. Punto de corte más alto en $y = 9$.

43. Distancia $AP = 100\cos\theta$. Distancia $PB = 100\theta$. Tiempo empleado: $T(\theta) = 2\cos\theta + \theta$. Mínimo si $\theta = \pi/2$ ($P = A$, no debe tirarse al agua).