Licenciatura en Químicas	Física 2003-2004	Tema 1: Sistemas de Unidades. Cálculos estimativos. Vectores

1. En las siguientes expresiones, la distancia x está en metros, el tiempo t en segundos y la velocidad v en metros por segundo. Determínense las unidades de C_1 y C_2 en el SI.
    - $x = C_1 + C_2 t$
    - $x = C_1 \cos(C_2 t)$
    - $v = C_1 e^{(-C_2 t)}$
2. Obténganse, mediante análisis dimensional, las siguientes expresiones:
    - La velocidad de propagación de una onda en una cuerda, sabiendo que depende de la tensión y de la densidad lineal de la cuerda.
    - La velocidad de escape de un cohete de la Tierra, v_{esc}, sabiendo que ésta depende de la masa de la Tierra, el radio de la Tierra y de la constante de gravitación universal, G.
3. Respóndase mediante un cálculo estimativo a las siguientes preguntas:
    - ¿Cuántas moléculas hay en un vaso de agua?
    - ¿Cuánta energía hay que dar a cada molécula para subir la temperatura del vaso en 10 grados?
    - ¿Cuántas células hay en el cuerpo humano si la masa media de una célula es aproximadamente 10^{-12} kg?
    - ¿Cuántos átomos hay en una célula si su masa se compone de oxígeno en un 65%, de carbono en un 18%, de hidrógeno en un 10% y de nitrógeno en un 3%?
    - ¿Cuántos átomos hay en un cromosoma humano si contiene aproximadamente 150 millones de pares de bases y cada base contiene, en media, 60 átomos?
4. Un vector del plano tiene su origen en el punto $(1, 2)$ y su extremo en el punto $(2, 5)$. Calcúlese su módulo y el ángulo que forma con el eje X.

    Respuesta: $|\vec{v}| = \sqrt{10}$, $\alpha = 71.6^o$
5. Dados los vectores $\vec{a} = 4\vec{\imath} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Calcúlese:
    - Módulo de cada vector
    - Producto escalar
    - Ángulo que forman
    - Vector suma y vector diferencia
    - Producto vectorial $\vec{a} \wedge \vec{b}$
6. Calcúlese el módulo, dirección y componentes de la resultante (suma vectorial) de un conjunto de fuerzas aplicadas en el origen de coordenadas de módulos 12 N, 9 N, 3 N y que forman ángulos con el eje positivo OX de 0º, 30º, 120º, respectivamente.

    Respuesta: $\vec{F} = (18.3\vec{\imath} + 7.1\vec{\jmath})$ N; $|\vec{F}| = 19.6$ N; la dirección la definimos mediante el ángulo α que forma el vector con el eje OX: $\alpha = 21.2^o$

7. Dados dos vectores de componentes $\vec{a} = (1,2,3)$ y $\vec{b} = (3,2,1)$ encuéntrese un vector de módulo unidad que sea perpendicular a ambos.

Respuesta: $\vec{u}_c = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$ o el vector opuesto

8. Un vector $\vec{a}$ aplicado en el punto $A = (3,4,2)$ tiene módulo 4 y forma con los ejes OX y OY ángulos de 30º y 60º respectivamente. Calcúlese el momento del vector $\vec{a}$ respecto a un punto B situado en (1,1,0).

Respuesta: $\vec{M}_B = -4\vec{\imath} + 4\sqrt{3}\vec{\jmath} + (4 - 6\sqrt{3})\vec{k}$

9. Hállese el momento respecto al eje OX de los vectores $\vec{a} = (0,1,2)$ y $\vec{b} = (0,0,2)$ que están aplicados en el punto P de coordenadas $(0,1,0)$

Respuesta: $M_{\text{eje}|a} = 2$ y $M_{\text{eje}|b} = 2$.

10. Calcular la resultante del momento con respecto al origen del conjunto de vectores $\vec{a} = \vec{\jmath}$ y $\vec{b} = -\vec{\imath} + \vec{k}$ aplicados en los puntos $P_1 = (1,0,0)$, y $P_2 = (0,1,0)$, respectivamente. ¿Se puede sustituir el sistema de dos vectores por su suma para hallar el momento resultante respecto al origen?

Respuesta: $\vec{M}_0 = 1\vec{\imath} + 2\vec{k}$; No, porque los vectores no están aplicados en el mismo punto

11. Un vector $\vec{r}$ varía en el tiempo de la forma $\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\vec{\imath} + \operatorname{sen}(\omega t)\vec{\jmath} + \vec{k}$, donde ω es una constante. Calcúlese:

- Derivada respecto al tiempo de $\vec{r}(t)$
- Ángulo que forman el vector $\vec{r}(t)$ y su derivada
- Producto vectorial de $\vec{r}(t)$ y su derivada

12. Dada la función, $f(x,y,z) = 3xy - \frac{2z}{x^2}$, calcúlense:

- las derivadas parciales de la función respecto de cada variable
- el gradiente de la función en el punto (1,2,3)

Respuesta: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y + \frac{4z}{x^3}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2}{x^2}$; b) $\nabla f(1,2,3) = 18\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$