Asignatura Física General. Licenciatura en Química. Grupo B

Soluciones a los problemas de los temas 7 y 8 no resueltos en clase

2. Teniendo en cuenta que el momento de la fuerza aplicada con respecto al eje de rotación es

$$\tau_z = FR \tag{1}$$

y que el momento de inercia del disco es $I_z = MR^2/2$, la ecuación de la rotación $\tau_z = I_z\alpha$ nos indica que el disco realiza un movimiento circular uniformemente acelerado con aceleración angular

$$\alpha = \frac{\tau_z}{I_z} = \frac{2FR}{MR^2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \times 19{,}6 \text{ N}}{50 \text{ kg} \times 1{,}8 \text{ m}} = 0{,}436 \text{ rad/s}^2 \tag{2}$$

i) El ángulo de girado en un tiempo t, teniendo en cuenta que el disco está inicialmente en reposo, es:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\,\alpha t^2 \tag{3}$$

y para $t = 5$ s:

$$\theta(5 \text{ s}) = \frac{1}{2} \times 0{,}436 \text{ rad/s}^2 \times (5 \text{ s})^2 = 5{,}4 \text{ rad} \tag{4}$$

ii) La velocidad angular en un tiempo t es $\omega(t) = \alpha t$. Por tanto, al cabo de 5 segundos es:

$$\omega(5 \text{ s}) = 0{,}436 \text{ rad/s}^2 \times 5\text{s} = 2{,}18 \text{ rad/s} \tag{5}$$

Por otro lado, el momento de inercia es

$$I_z = \frac{1}{2} \times 50 \text{ kg} \times (1{,}8 \text{ m})^2 = 81 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \tag{6}$$

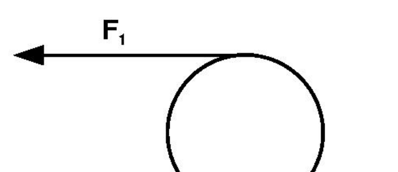
Por tanto, el momento angular con respecto al eje de rotación es:

$$L_z = I_z\,\omega(5 \text{ s}) = 81 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \times 2{,}18 \text{ rad/s} = 176{,}4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \tag{7}$$

iii) La energía cinética en $t = 5$ s es:

$$E_c = \frac{1}{2}\,I_z\,\omega(5 \text{ s})^2 = \frac{1}{2} \times 81 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \times (2{,}18 \text{ rad/s})^2 = 192 \text{ J} \tag{8}$$

6. Resolvemos por un lado el movimiento de traslación del centro de masas y por otro el de rotación con respecto a un eje que pasa por dicho centro y es perpendicular al disco. Supondremos que no existen fuerzas de rozamiento.



En el caso de la traslación, da igual el punto en el que estén aplicadas las fuerzas. De acuerdo con el esquema de la figura, su resultante es paralela a las dos fuerzas aplicadas, está dirigida hacia la izquierda y su módulo es:

$$F_{neta} = 60 \text{ N} - 40 \text{ N} = 20 \text{ N} \tag{9}$$

Por lo tanto el centro de masas realizará un movimiento uniformemente acelerado durante los 5 segundos en los que se aplican las fuerzas, con aceleración

$$a_{cm} = \frac{F_{neta}}{m} = \frac{20 \text{ N}}{100 \text{ kg}} = 0{,}2 \text{ m/s}^2 \qquad (10)$$

Después de estos primeros 5 segundos de M.U.A., el disco seguirá con un movimiento uniforme de velocidad:

$$v_{cm,fin} = 0{,}2 \text{ m/s}^2 \times 5 \text{ s} = 1 \text{ m/s} \qquad (11)$$

dirigida hacia la izquierda.

Veamos ahora la rotación. Las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ ejercen un momento positivo puesto que hacen girar el disco en sentido horario. El momento neto de las fuerzas con respecto a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro es:

$$\tau_{cm} = F_1 R + F_2 R = R(F_1 + F_2) = 0{,}6 \text{ m} \times 10 \text{ N} = 60 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad (12)$$

que da lugar a una aceleración angular

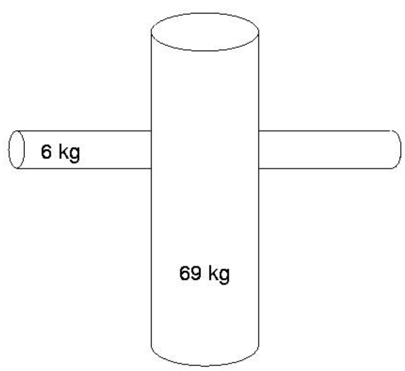
$$\alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{2\tau}{mR^2} = \frac{2 \times 60 \text{ N} \cdot \text{m}}{100 \text{ kg} \times (0{,}6 \text{ m})^2} = 3{,}33 \text{ rad/s}^2 \qquad (13)$$

La rotación consistirá en un giro uniformemente acelerado con esta aceleración angular durante los primeros 5 segundos. Después el disco realizará un giro con velocidad angular uniforme:

$$\omega_{fin} = 3{,}33 \text{ rad/s}^2 \times 5 \text{ s} = 16{,}67 \text{ rad/s} \qquad (14)$$

Obsérvese que en este problema no hay ninguna relación entre la aceleración y la velocidad del centro de masas y la aceleración y la velocidad angulares, como ocurre en poleas o en cuerpos que ruedan sin deslizar.

8. El problema nos pide únicamente estimar la velocidad angular después de encoger los brazos, es decir, dar únicamente un valor aproximado. Para ello consideraremos que el individuo con los brazos extendidos está formado por un cilindro vertical de masa 69 kg y radio 0.25 m, que daría cuenta del tronco, la cabeza y las piernas, y de una varilla horizontal de 2 m de longitud y de masa 6 kg que es una aproximación de los brazos extendidos del patinador (ver figura). Cuando encoge los brazos, el patinador se puede considerar como un cilindro de masa 75 kg y de radio 0.25 cm.



Recordando que el momento de inercia de una varilla de masa m y longitud l con respecto a un eje que pasa por su centro es $ml^2/12$ (Tipler, pág. 262), el momento de inercia con los brazos extendidos y con respecto al eje de rotación es:

$$I_{z,ext} = I_{z,tronco} + I_{z,brazos} = \frac{1}{2} \times 69 \text{ kg} \times (0{,}25 \text{ m})^2 + \frac{1}{12} \times 6 \text{ kg} \times (2 \text{ m})^2 = 4{,}16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad (15)$$

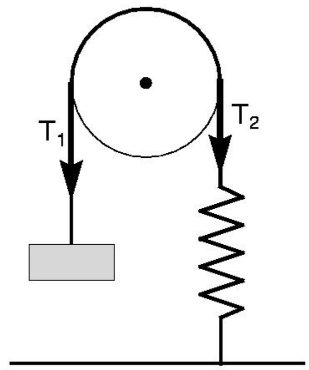
El momento de inercia del patinador con los brazos encogidos es:

$$I_{z,enc} = \frac{1}{2} \times 75 \text{ kg} \times (0{,}25 \text{ m})^2 = 2{,}34 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad (16)$$

El momento angular del patinador se conserva, si despreciamos el rozamiento del patín con el hielo, ya que el peso es paralelo al eje de rotación. Por tanto, si $\omega_{ext} = 15$ rad/s es la velocidad angular del patinador con los brazos extendidos y ω_{enc} con los brazos encogidos, tenemos:

$$I_{z,ext}\,\omega_{ext} = I_{z,enc}\,\omega_{enc} \quad \Rightarrow \quad \omega_{enc} = \frac{I_{z,ext}}{I_{z,enc}}\omega_{ext} = \frac{4{,}16\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{2{,}34\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2} \times 15\ \mathrm{rad/s} = 26{,}6\ \mathrm{rad/s} \tag{17}$$

9. Tomamos como positivo el giro anti-horario y el movimiento descendente de la masa. De este modo la aceleración de la masa es $a = \alpha R$, en donde α es la aceleración angular de la polea y R su radio. Llamaremos T_1 y T_2 a las tensiones de la cuerda y x al desplazamiento de la masa con respecto a la posición en la que el muelle tiene su longitud natural (positivo hacia arriba).



La tensión T_2 es la misma a lo largo de todo el tramo de cuerda que va de la polea al muelle y, por tanto, es igual a la fuerza recuperadora de éste. Su módulo es por tanto $T_2 = k|x|$. Veamos ahora la ecuación del movimiento de la masa y la ecuación de rotación de la polea. Con el convenio de signos que hemos supuesto, el momento de T_1 es positivo. Si el muelle está estirado, x es positivo y la tensión T_2 apunta hacia abajo. Por tanto su momento es negativo y las ecuaciones de rotación y del movimiento son:

$$\begin{aligned} RT_1 - RT_2 &= I_{cm}\alpha \\ mg - T_1 &= ma \end{aligned} \tag{18}$$

Utilizando $T_2 = kx$ (estamos considerando x positivo) y $\alpha = a/R$ y despejando la tensión T_1, se tiene:

$$T_1 = I_{cm}\frac{a}{R^2} + kx \tag{19}$$

Nótese que la tensión T_2 no puede ser negativa puesto que la cuerda no es rígida y no puede ejercer fuerza hacia arriba. Por lo tanto, la ecuación (19) no vale para desplazamientos x negativos. Esto implica que el siguiente desarrollo sólo es válido para oscilaciones de amplitud menores que la posición de equilibrio del sistema x_{eq} como veremos más adelante. La ecuación del movimiento de la masa es finalmente:

$$ma = mg - \frac{I_{cm}}{R^2}a - kx \quad \Rightarrow \quad a\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) = mg - kx \tag{20}$$

Sustituyendo el valor del momento de inercia de un anillo, $I_{cm} = MR^2$ y teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de x con respecto al tiempo, llegamos a:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{mg}{m+M} - \frac{k}{m+M}x(t) \tag{21}$$

que es un movimiento armónico simple alrededor de la posición de equilibrio $x_{eq} = mg/k$. Para comprobarlo, realizamos el cambio de variable estudiado en el tema 5:

$$y(t) = x(t) - x_{eq} = x(t) - \frac{mg}{k} \tag{22}$$

que conduce a la ecuación:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m+M}y(t) = -\omega^2 y(t) \tag{23}$$

que es la de un M.A.S. de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \tag{24}$$

expresión válida siempre y cuando la amplitud del movimiento sea $A < x_{eq} = \frac{mg}{k}$ ya que entonces $|y(t)| < x_{eq} \Rightarrow x(t) > 0$, condición esta última necesaria para que la ecuación (19) sea correcta.

11. Si el individuo comienza a girar sobre sí mismo, por conservación del momento angular, la plataforma girará también (en el sentido opuesto) y de este modo podrá alcanzar la puerta. El principio de conservación del momento angular se aplica al sistema plataforma+individuo, puesto que todas las fuerzas que actúan sobre este sistema o están aplicadas sobre el eje o son paralelas a él (como la gravedad), con lo cual el momento total externo es nulo.

12. I) Esta pregunta la resolveremos en dos partes. Primero hemos de calcular qué velocidad angular lleva el sistema m_1+varilla1 cuando colisiona con el sistema m_2+varilla2. Esto lo haremos mediante la conservación de la energía mecánica. Después, aplicamos el hecho de que se conserva el momento angular de todo el sistema en el choque para calcular la velocidad angular a la que salen las dos masas y a partir de ella, la velocidad lineal.

    La conservación de la energía mecánica total del sistema implica:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} \tag{25}$$

donde la i se refiere al estado inicial con la masa m_1 en su posición inicial de reposo y la f al estado final con la masa m_1 en la posición más baja de su trayectoria, justo antes de chocar con la otra masa. Tomamos como origen de alturas y energía potencial la posición de la partícula de masa m_2.

Sea $L = 1$ m la longitud de las varillas. Entonces, los distintos términos que aparecen en la conservación de la energía son:

- Energía potencial *inicial* de la masa m_1: m_1gL
- Energía potencial *inicial* de la varilla (el centro de masas de la varilla se encuentra a altura L por encima del origen de alturas): m_vgL
- Energía cinética *inicial* de la varilla y de la masa m_1: 0
- Energía potencial *final* de la masa m_1: 0
- Energía potencial *final* de la varilla (ahora el centro de masas de la varilla se encuentra a altura $L/2$ por encima del origen de alturas) : $m_vg\frac{L}{2}$
- Energía cinética *final* de rotación de la masa m_1 en torno al punto de suspensión: $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2$
- Energía cinética *final* de rotación de la varilla en torno al punto de suspensión: $\frac{1}{2}I_v\omega_1^2$

La conservación de la energía implica:

$$m_vgL + m_1gL = m_vg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_v\omega_1^2 \tag{26}$$

de donde

$$\omega_1^2 = \frac{m_vgL + 2m_1gL}{I_1 + I_v} \tag{27}$$

siendo $I_1 = m_1L^2$ e $I_v = \frac{1}{3}m_vL^2$ los momentos de inercia de la partícula m_1 y de la varilla en torno al punto de suspensión, respectivamente.

La conservación del momento angular total en el choque toma la expresión:

$$I_1\omega_1 + I_v\omega_1 = (I_1 + I_2 + 2I_v)\omega \tag{28}$$

donde ω es la velocidad de rotación de todo el conjunto de dos masas puntuales y dos varillas tras chocar y quedar unidas (choque perfectamente inelástico). $I_2 = m_2L^2$ es el momento de inercia de la partícula puntual m_2 en torno al punto de suspensión. Despejando ω se obtiene

$$\omega = \frac{I_1 + I_v}{I_1 + I_2 + 2I_v}\omega_1 = \frac{\sqrt{I_1 + I_v}\sqrt{m_vgL + 2m_1gL}}{I_1 + I_2 + 2I_v} \tag{29}$$

donde hemos substituido ω_1 por el valor obtenido en (27). Si ω es la velocidad de rotación, la velocidad lineal del sistema justo después del choque vendrá dada por $v = \omega L$. Si substituimos los valores de los momentos de inercia I_1, I_2 e I_v en la expresión (29) para ω, obtendremos para v la siguiente expresión en función de datos del problema

$$v = \omega L = \frac{\sqrt{(m_1 + \frac{1}{3}m_v)(m_vgL + 2m_1gL)}}{m_1 + m_2 + \frac{2}{3}m_v} \simeq 1{,}51 \text{ m/s} \tag{30}$$

Es interesante resaltar que en el límite en que la masa de las varillas es despreciable frente a las masas de las partículas se obtiene

$$v(m_v \to 0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gL} \tag{31}$$

expresión que coincide con el resultado que se obtendría resolviendo el problema por conservación del momento lineal en el choque de las masas m_1 y m_2 y suponiendo que las varillas no tienen masa. El valor númerico obtenido de esta forma

$$v(m_v \to 0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gL} \simeq 1{,}48 \text{ m/s} \tag{32}$$

se aproxima bastante al correcto $v \simeq 1{,}51$ m/s debido a que la masa de las varillas es pequeña comparada con las masas m_1 y m_2.

II) Como hemos visto en el apartado anterior, el momento angular total justo antes y justo después del choque es el mismo, y vale

$$L = (I_1 + I_v)\omega_1 = \sqrt{(I_1 + I_v)(m_vgL + 2m_1gL)} \simeq 4{,}61 \text{ kgm}^2/\text{s} \tag{33}$$

III) Como la energía potencial es la misma justo antes y justo después del choque ya que consideramos que el choque ocurre de manera puntual e instantánea, la única energía que se pierde es energía cinética. Llamemos η a la fracción de energía cinética que se pierde en el choque

$$\eta = \frac{E_{\text{cAntes}} - E_{\text{cDespués}}}{E_{\text{cAntes}}} \tag{34}$$

La energía cinética del sistema después del choque valdrá $E_{\text{cDespués}} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + 2I_v)\omega^2$, mientras que antes del choque $E_{\text{cAntes}} = \frac{1}{2}(I_1 + I_v)\omega_1^2$. Por otra parte, sabemos que la conservación del momento angular (28) relaciona las velocidades angulares ω_1 y ω obteniéndose (29). Substituyendo (29) en (34) y operando se llega a una expresión sencilla en función de los momentos de inercia

$$\eta = 1 - \frac{I_1 + I_v}{I_1 + I_2 + 2I_v} \simeq 0{,}66 \tag{35}$$

Es decir, se pierde un 66 % de la energía cinética en el choque.

IV) Justo después del choque, el sistema tiene una energía cinética

$$E_{\text{cDespués}} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + 2I_v)\omega^2 \tag{36}$$

Como la energía mecánica total del sistema permanece constante mientras el sistema asciende, cuando el sistema llegue a su punto más alto y tenga velocidad nula, toda esa energía cinética se habrá convertido en energía potencial gravitatoria y por tanto

$$E_p = E_{\text{cDespués}} \tag{37}$$

Teniendo en cuenta que si las masas puntuales suben a una altura h, los centros de masas de las varillas suben $h/2$, la energía potencial del sistema en su punto de máxima altura será

$$E_p = m_1 gh + m_2 gh + m_v g\frac{h}{2} + m_v g\frac{h}{2} \tag{38}$$

Substituyendo (36) y (38) en (37) y despejando h, obtenemos

$$h = \frac{(I_1 + I_2 + 2I_v)\omega^2}{2g(m_1 + m_2 + m_v)} = \frac{(I_1 + I_v)(m_v gL + 2m_1 gL)}{2g(m_1 + m_2 + m_v)(I_1 + I_2 + 2I_v)} \tag{39}$$

donde hemos substituido el valor hallado para ω. Substituyendo en (39) el valor de los momentos de inercia, simplificando y operando numéricamente se obtiene el valor final de

$$h = \frac{L(m_1 + \frac{1}{3}m_v)(m_v + 2m_1)}{2(m_1 + m_v + m_2)(m_1 + m_2 + \frac{2}{3}m_v)} \simeq 0{,}12 \text{ m} \tag{40}$$

13. La energía cinética de rotación del sistema es

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{41}$$

donde ω es la velocidad angular e I es el momento de inercia del sistema calculado respecto del eje en torno al cual está girando. Por otra parte, podemos escribir el momento angular del sistema como $L = I\omega$ y por tanto

$$E_r = \frac{L^2}{2I}. \tag{42}$$

La cuantización del momento angular impone que L^2 sólo puede tomar los valores $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, con $l = 0, 1, 2, \ldots$ con lo que E_r sólo puede tomar los valores

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \tag{43}$$

En consecuencia, la diferencia de energías entre los estados rotacionales de la molécula con $l = 1$ y $l = 0$ será

$$\Delta E_r = E_r(l=1) - E_r(l=0) = \frac{1}{2I}(2\hbar^2 - \hbar^2) = \frac{\hbar^2}{2I} \tag{44}$$

Por último, el momento de inercia I de dos masas puntuales iguales m_O separadas entre sí una distancia r_0, que giran en torno a un eje que pasa por su centro de masas y es perpendicular a la linea que las une es

$$I = m_O\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 + m_O\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{m_O r_0^2}{2} \tag{45}$$

Substituyendo este valor de I en (44) y despejando r_0^2, obtenemos la siguiente expresión en función de constantes conocidas y datos del problema

$$r_0^2 = \frac{\hbar^2}{m_O \Delta E_r} \tag{46}$$

Utilizando los valores de $hc \simeq 12400$ eVÅ y de la masa de un nucleón $m_n \simeq m_p = 938$ MeV/c^2 proporcionados por el problema podemos calcular el valor de r_0 tan sólo multiplicando la expresión (46) por la velocidad de la luz al cuadrado

$$r_0^2 = \frac{h^2c^2}{(2\pi)^2 m_O c^2 \Delta E_r} \tag{47}$$

Finalmente, la masa del oxígeno es $m_O = 16$ uma, es decir, aproximadamente 16 veces la masa de un protón o neutrón, y por tanto $m_O c^2 \simeq 16 m_p c^2 \simeq 16 \times 938$ MeV, y $\Delta E_r \simeq 2{,}6 \times 10^{-4}$ eV es dato del problema. Tenemos entonces

$$r_0^2 = \frac{(12400)^2 \text{ eV}^2\text{Å}^2}{(2\pi)^2 16 \times 938 \times 10^6 \text{ eV} \times 2{,}6 \times 10^{-4} \text{ eV}} \simeq 1 \text{ Å}^2 \Rightarrow r_0 \simeq 1 \text{ Å} \tag{48}$$