Asignatura Física General. Licenciatura en Química. Grupo B

Soluciones a los problemas de los temas 9 y 10

1. El peso del hombre es:

$$P = G\frac{M_T m}{R_T^2} \tag{1}$$

I) Si el radio de la tierra se duplica $R'_T = 2R_T$ manteniéndose constante la masa, el nuevo peso es:

$$P' = G\frac{M_T m}{{R'_T}^2} = G\frac{M_T m}{4R_T^2} = \frac{P}{4} = \frac{784 \text{ N}}{4} = 196 \text{ N} \tag{2}$$

II) Si la densidad ρ_T es constante, la nueva masa es:

$$M'_T = \rho_T \frac{4}{3}\pi {R'_T}^3 = 8 \times \rho_T \frac{4}{3}\pi R_T^3 = 8M_T \tag{3}$$

y el peso será:

$$P' = G\frac{M'_T m}{{R'_T}^2} = G\frac{8M_T m}{4R_T^2} = 2P = 2 \times 784 \text{ N} = 1568 \text{ N} \tag{4}$$

III) La masa es una propiedad de un cuerpo que no depende del campo gravitatorio en el que se encuentre. Luego no varía de una situación a otra.

2. Igualamos la fuerza gravitatoria al producto de la masa por la aceleración centrípeta:

$$G\frac{M_T m_s}{(h + R_T)^2} = m_s \frac{v_s^2}{h + R_T} \tag{5}$$

en donde hemos tenido en cuenta que el radio de la órbita del satélite es $R_T + h$.

I) La velocidad es:

$$v_s = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \times 5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}}{6{,}37 \times 10^6 \text{ m} + 3 \times 10^5 \text{ m}}} = 7{,}73 \text{ km/s} \tag{6}$$

II) Su periodo de revolución es:

$$T_s = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_s} = \frac{2\pi \times 6{,}67 \times 10^6 \text{ m}}{7{,}73 \times 10^3 \text{ m/s}} = 5{,}42 \times 10^3 \text{ s} = 1{,}5 \text{ h} \tag{7}$$

III) Su aceleración centrípeta o normal:

$$a_n = \frac{v_s^2}{R_T + h} = \frac{(7{,}73 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{6{,}67 \times 10^6 \text{ m}} = 8{,}96 \text{ m/s}^2 \tag{8}$$

IV) La energía mecánica del satélite es:

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}\, m_s v_s^2 - G\frac{M_T m_s}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2}\, m_s v_s^2 \tag{9}$$

en donde hemos hecho uso de $v_s^2 = GM_T/(R_T+h)$, que da lugar al teorema del virial ($E_{pot} = -2E_{cin}$). Sustituyendo los datos del problema:

$$E_{mec} = -\frac{10^3 \text{ kg} \times (7{,}73 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{2} = -29{,}9 \times 10^9 \text{ J} \tag{10}$$

v) En la superficie de la tierra, el satélite en reposo tiene una energía

$$E_{mec,0} \simeq E_{pot,0} = -G\frac{M_T m_s}{R_T} = -gR_T m_s = -9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 6{,}37\times\ 10^6 \text{ m} \times 10^3 \text{ kg} = -62{,}4\times 10^9 \text{ J} \quad (11)$$

en donde hemos despreciado la energía cinética del satélite. Esta energía no es nula ya que el satélite está en reposo con respecto a la superficie de la tierra pero ésta gira alrededor de su eje. La velocidad real del satélite depende de la latitud en donde se encuentre y es máxima en el ecuador. La energía cinética del satélite en reposo en el ecuador será

$$E_{cin,0} = \frac{1}{2}m_s v^2 = \frac{m_s 2\pi^2 R_T^2}{T^2} = \frac{10^3 \text{ kg} \times \pi^2 \times (6400 \times 10^3 \text{m})^2}{(24 \times 3600 \text{ s})^2} \simeq 1{,}08 \times 10^8 \text{ J} \ll E_{pot,0} \quad (12)$$

por lo que es aceptable despreciarla. La energía necesaria para ponerlo en órbita es entonces:

$$E_{mec} - E_{mec,0} = -29{,}9 \times 10^9 \text{ J} + 62{,}4 \times 10^9 \text{ J} = 32{,}5 \times 10^9 \text{ J} \quad (13)$$

vi) La energía necesaria para pasar de su órbita donde tiene una energía E_{mec} al infinito será:

$$E_\infty - E_{mec} = -E_{mec} = 29{,}9 \times 10^9 \text{ J} \quad (14)$$

ya que $E_\infty = 0$, por ser el infinito el origen de energía potencial gravitatoria.

3. i) Por la ley de Kepler:

$$T^2 = CR_{orb}^3 \quad (15)$$

Si el radio de la órbita del satélite es $R_L/4$, entonces su periodo es:

$$T_S^2 = C\left(\frac{R_L}{4}\right)^3 = \frac{T_L^2}{4^3} \quad \Rightarrow \quad T_S = \frac{T_L}{\sqrt{4^3}} = \frac{T_L}{8} = \frac{28 \text{ días}}{8} = 3{,}5 \text{ días} \quad (16)$$

ii) Igualando fuerza centrípeta y fuerza de gravedad para un cuerpo de masa m que orbita alrededor de la tierra:

$$G\frac{M_T m}{R_{orb}^2} = m\frac{v^2}{R_{orb}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{orb}}} \quad (17)$$

Sustituyendo el radio de la órbita del satélite por $R_L/4$:

$$v_{sat} = \sqrt{\frac{4GM_T}{R_L}} = 2\sqrt{\frac{GM_T}{R_L}} = 2v_L \quad (18)$$

4. Se trata de un satélite geoestacionario.

i) Igualando la fuerza centrípeta y la gravitatoria:

$$G\frac{M_T m_s}{R_{orb}^2} = m_s\frac{v^2}{R_{orb}} \quad (19)$$

Como el satélite efectúa un movimiento circular uniforme se cumple

$$v = \omega R_{orb}^2 \Rightarrow v^2 = \omega^2 R_{orb}^2 = \frac{4\pi^2 R_{orb}^2}{T_s^2} \quad (20)$$

Substituyendo en (19), obtenemos

$$G\frac{M_T m_s}{R_{orb}^2} = m_s\frac{4\pi^2 R_{orb}}{T_s^2} \quad (21)$$

$$R_{orb} = \left[\frac{GM_T T_s^2}{4\pi^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{gR_T^2 T_s^2}{4\pi^2}\right]^{1/3} = 4{,}22 \times 10^7 \text{ m} \tag{22}$$

donde hemos utilizado que para que el satélite permanezca siempre sobre la misma vertical, ha de tener el mismo periodo de revolución que la tierra, es decir, 24 horas y por tanto $T_s = 24 \times 3600$ s. Nos preguntan por la altura del satélite sobre la superficie de la tierra, que es:

$$h_s = R_{orb} - R_T = 4{,}22 \times 10^7 \text{ m} - 0{,}637 \times 10^7 \text{ m} = 3{,}58 \times 10^7 \text{ m} \tag{23}$$

II) La energía potencial del satélite es:

$$E_{pot} = -\frac{GM_T m_s}{R_{orb}} = -\frac{gR_T^2 m_s}{R_{orb}} = -\frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \times (6{,}4 \times 10^6 \text{ m})^2 \times 100 \text{ kg}}{4{,}22 \times 10^7 \text{ m}} = -9{,}5 \times 10^8 \text{ J} \tag{24}$$

III) Por el teorema del virial (o utilizando la expresión (19)):

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_s v_s^2 = \frac{GM_T m_s}{2R_{orb}} = -\frac{E_{pot}}{2} = 4{,}75 \times 10^8 \text{ J} \tag{25}$$

5. La velocidad de escape en la tierra es:

$$v_{esc} = \sqrt{2gR_T} = 11{,}2 \text{ km/s} \tag{26}$$

que es alcanzada por las moléculas de hidrógeno sobre la superficie terrestre. Por tanto, pueden escapar con facilidad de la atracción gravitatoria de la tierra.

Para quedar ligadas a la superficie del planeta, la velocidad de escape debería ser del orden de 20 km/s. Para ello, el radio del planeta debería ser:

$$R_P = \frac{(20 \times 10^3 \text{m/s})^2}{2 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2} \simeq 20\,000 \text{ km} \tag{27}$$

es decir, unas tres veces el radio de la tierra.

6. El aire que hay dentro de cada rueda ejerce una fuerza sobre el trozo de goma que está en contacto con el suelo:

$$F = PA = 300 \times 10^3 \text{ Pa} \times 10^{-2} \text{ m}^2 = 3000 \text{ N} \tag{28}$$

en donde hemos tenido en cuenta que la presión real de cada rueda es la manométrica más la atmosférica ($P_{at} \simeq 100$ kPa).

Como la goma está en reposo, el suelo tendrá que ejercer la misma fuerza. Luego, por la tercera ley de Newton, cada rueda ejerce sobre el suelo una fuerza de 3000 newtons. La fuerza total que ejerce el coche sobre el suelo, que es igual a su peso, es:

$$F_{total} = 4F = 12000 \text{ N} \tag{29}$$

La masa del coche es por tanto:

$$m = \frac{F_{total}}{g} \simeq \frac{12000 \text{ N}}{10 \text{ m/s}^2} = 1200 \text{ kg} \tag{30}$$

En la segunda parte del problema, la presión del aire en cada rueda es $P' = 200$ kPa y la fuerza que cada rueda ejerce sobre el suelo es la misma (el peso dividido por cuatro). Por tanto, la superficie es:

$$A' = \frac{F}{P'} = \frac{3000 \text{ N}}{2 \times 10^5 \text{ Pa}} = 150 \text{ cm}^2 \tag{31}$$

7. El empuje del globo menos su peso es:

$$F_{tot} = V_{globo}(\rho_{aire} - \rho_{hid})g = V_{globo}g \times 1{,}203 \text{ kg/m}^3 \tag{32}$$

Si queremos que sea igual a 1000 kg $\times g$, deberá ser:

$$V_{globo} = \frac{1000 \text{ kg} \times g}{1{,}203 \text{ kg/m}^3 \times g} = 831 \text{ m}^3 \tag{33}$$

Para ello el radio debe ser:

$$R = \left(\frac{3}{4\pi} \times 831 \text{ m}^3\right)^{1/3} = 5{,}8 \text{ m} \tag{34}$$

8. La fuerza total que siente el cuerpo, cuando está sumergido una altura z es (tomamos como positivo el movimiento descendente):

$$F_{tot} = Ah\rho_{mad}g - Az\rho_{agua}g \tag{35}$$

La ecuación de Newton para el cilindro es:

$$Ah\rho_{mad}\frac{d^2z}{dt^2} = Ag(h\rho_{mad} - z\rho_{agua}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\left(1 - \frac{\rho_{agua}}{h\rho_{mad}}z\right) \tag{36}$$

que es la ecuación de un movimiento armónico en torno a la posición de equilibrio:

$$z_{eq} = \frac{\rho_{mad}}{\rho_{agua}}h \tag{37}$$

de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{g\rho_{agua}}{h\rho_{mad}}} = 35 \text{ s}^{-1} \tag{38}$$

y periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}18 \text{ s} \tag{39}$$

9. Para hallar la velocidad de salida del agua por un orificio a una profundidad z utilizamos el teorema de Bernoulli entre un punto de la superficie del depósito y un punto justo en el orificio de salida. El fluido en un punto en la superficie está a presión P_{atm} puesto que está en contacto con el aire, a una altura $4h$ y en reposo. Por otro lado, el fluido en un punto en un orificio de salida a profundidad z estará a una presión P_{atm} ya que también está en contacto con el aire, a una altura $4h - z$ y saldrá con velocidad v_s, que es lo que queremos hallar. Tenemos por tanto

$$P_{atm} + \rho g 4h = P_{atm} + \rho g(4h - z) + \frac{1}{2}\rho v_s^2 \tag{40}$$

de donde se obtiene que la velocidad de salida por un orificio situado a una profundidad z es $v_s = \sqrt{2gz}$. La velocidad de salida es horizontal. Una vez que sale por el orificio, el agua realiza un movimiento parabólico de coordenadas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2gz} \times t \\ y(t) &= 4h - z - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{41}$$

en donde hemos tenido en cuenta que la altura del orificio es $4h - z$. El agua toca el suelo en un tiempo

$$t_{tot} = \sqrt{\frac{8h - 2z}{g}} \tag{42}$$

y el alcance del chorro es:

$$x(t_{tot}) = 2\sqrt{z(4h - z)} \tag{43}$$

Para el orificio superior, $z = h$ y el alcance es $2h\sqrt{3}$. Para el intermedio, $z = 2h$, y el alcance es $4h$. Para el inferior, $z = 3h$ y el alcance es $2h\sqrt{3}$. Luego el intermedio es el que llega más lejos y los otros dos tienen el mismo alcance, tal y como ocurre en el dibujo (c).

10. Por la ecuación fundamental de la hidrostática, la diferencia de presiones entre la superficie libre del mercurio y la superficie en contacto con el gas es $\rho_{Hg}gh$. Como la presión en la superficie libre es la atmosférica, la presión real del gas es:

$$P = P_{at} + \rho_{Hg}gh = 101{,}3 \times 10^3 \text{ Pa} + 13{,}6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 0{,}3 \text{ m} = 61{,}3 \times 10^3 \text{ Pa} \tag{44}$$

Se podía haber hecho también en milímetros de mercurio y después, multiplicando por 133.2 mm Hg/Pa, pasar el resultado a pascales, es decir:

$$P = P_{at} + \rho_{Hg}gh = 760 \text{ mm Hg} - 300 \text{ mm Hg} = 460 \text{ mm Hg} = 61272 \text{ Pa} \tag{45}$$

La presión en el fondo es

$$P_{fondo} = P + \rho_{gas}gl = 61282 \text{ Pa} \tag{46}$$

La diferencia es del orden del 0.02 %, luego es una buena aproximación tomar como constante la presión en todo el gas.

11. El caudal es

$$Q = \frac{27 \text{ l}}{5 \text{ s}} = 5{,}4 \text{ l/s} \tag{47}$$

y la velocidad en el estrechamiento

$$v_{est} = \frac{Q}{S_{est}} = \frac{5400 \text{ cm}^3/\text{l}}{9 \text{ cm}^2} = 600 \text{ cm/s} = 6 \text{ m/s} \tag{48}$$

Del mismo modo, la velocidad en la parte ancha es $v_{ancha} = Q/S_{ancha} = 1{,}5$ m/s. Para calcular la diferencia de presiones, utilizamos la ecuación de Bernoulli entre un punto en la parte ancha y otro en la parte estrecha situados a la misma altura:

$$P_{est} + \frac{1}{2}\rho v_{est}^2 = P_{ancha} + \frac{1}{2}\rho v_{ancha}^2 \tag{49}$$

de donde

$$P_{ancha} - P_{est} = \frac{1}{2}\rho\left(v_{est}^2 - v_{ancha}^2\right) = \frac{10^3 \text{ kg/m}^3}{2}\left[(6 \text{ m/s})^2 - (1{,}5 \text{ m/s})^2\right] = 16{,}9 \times 10^3 \text{ Pa} \tag{50}$$

La diferencia de alturas viene dada por la ecuación fundamental de la hidrostática (porque el mercurio está en reposo):

$$\rho_{Hg}gh = P_{ancha} - P_{est} = 16{,}9 \times 10^3 \text{ Pa} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{16{,}9 \times 10^3 \text{ Pa}}{13{,}6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}127 \text{ m} = 127 \text{ mm} \tag{51}$$

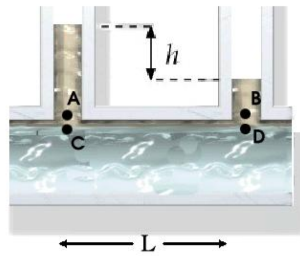
También podríamos haber hallado los milímetros de mercurio dividiendo los pascales por el factor de conversión, 133 mm Hg/Pa.

12. Sean A, B, C y D cuatro puntos situados en la intersección de la tubería con la primera y la segunda columnas, como muestra la figura. A y B justo por encima de la intersección y el fluido en A y B se encuentra por tanto en reposo. C y D se encuentran justo por debajo y el fluido en C y D se mueve a lo largo de la tubería. Para los puntos A y B podemos aplicar la ecuación de la hidrostática puesto que las columnas se encuentran en reposo y hallar así la diferencia de presiones

$$P_A - P_B = \rho gh \tag{52}$$

Por otro lado, entre los puntos C y D tenemos un fluido de viscosidad η que se mueve por una tubería de radio r. Por la ley de Poiseuille, la diferencia de presiones entre C y D será

$$P_C - P_D = RQ = \frac{8\eta LQ}{\pi r^4} \tag{53}$$



Ahora bien, el fluido en el punto C tiene que estar a la misma presión que en el punto A. De lo contrario, el fluido se movería de C a A o viceversa, cosa que no ocurre puesto que en A el fluido está en reposo. Es decir,

$$P_A = P_C \tag{54}$$

Lo mismo ocurre entre B y D y por tanto $P_B = P_D$. Tenemos entonces $P_A - P_B = P_C - P_D$, de donde

$$\rho g h = \frac{8\eta L Q}{\pi r^4} \Rightarrow \eta = \frac{\rho g h \pi r^4}{8LQ} \tag{55}$$

Todas las magnitudes necesarias para calcular η son dato del problema y únicamente es necesario transformarlas adecuadamente al sistema internacional. Haciendo esto y operando, se obtiene

$$\eta \simeq 9{,}24 \times 10^{-6} \text{ Pa s} \tag{56}$$

Para calcular la viscosidad hemos hecho uso de la ley de Poiseuille. Sin embargo, esta ley sólo es aplicable si el fluido se mueve en régimen laminar. Hemos de comprobar que el valor obtenido para la viscosidad es consistente con este hecho. Para ello calculamos el número de Reynolds

$$N_R = \frac{2r\rho v}{\eta} \tag{57}$$

La velocidad del fluido en la tubería v se puede calcular a partir del caudal Q y la sección de la tubería

$$Q = Av \Rightarrow v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} \tag{58}$$

Substituyendo v en (57) y operando numéricamente, obtenemos

$$N_R = \frac{2\rho Q}{\eta \pi r} \simeq 827 \tag{59}$$

Como el número de Reynolds es menor que 2000 podemos estar seguros de que el flujo es laminar y de que es correcto aplicar la ley de Poiseuille.